Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> linear, 1. Ordnung

Aufgabe: Löse die lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung:

$$x^2 y' + y = 0\text{, } y(1) = 1.$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differenzialgleichung der Form

$$y' + f(x)y = g(x)$$

heißt lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung mit g(x) als Störfunktion. Ist g(x) = 0, so ist die Differenzialgleichung homogen, ansonsten inhomogen. Die homogene lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung hat die Lösung:

$$y = C \cdot e^{-\int f(x)dx}\,,$$

die inhomogene Differenzialgleichung:

$$y = \int g(x) \cdot e^{\int f(x)dx} dx \cdot e^{-\int f(x)dx} + C \cdot e^{-\int f(x)dx}.$$

II. Die Differenzialgleichung $x^2 y' + y = 0$ ist homogen, so dass wir auf die Bestimmung einer speziellen Lösung verzichten können. Für die allgemeine Lösung gilt nach Division der Differenzialgleichung $x^2 y' + y = 0$ mit x^2 auf Grundlage von $y' + \frac{1}{x^2} y = 0 \Leftrightarrow y' + x^{-2} y = 0$:

$$y = C \cdot e^{-\int x^{-2}dx} = C \cdot e^{x^{-1}} = C \cdot e^{\frac{1}{x}}.$$

Wir verwenden noch die Anfangsbedingung y(1) = 1 und erhalten:

$$y(1) = C \cdot e^{\frac{1}{1}} = Ce = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{e}.$$

Die gesuchte Lösung der Differenzialgleichung lautet damit:

$$y = \frac{1}{e} \cdot e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}-1}.$$

www.michael-buhlmann.de / 06.2015 / Aufgabe 122