Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> linear, 1. Ordnung

Aufgabe: Löse die lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung:

$$y' - \frac{y}{x} = 1 - \frac{1}{x}, \text{ y(1) = 4.}$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differenzialgleichung der Form

$$y' + f(x)y = g(x)$$

heißt lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung mit g(x) als Störfunktion. Ist g(x) = 0, so ist die Differenzialgleichung homogen, ansonsten inhomogen. Die homogene lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung hat die Lösung:

$$y = C \cdot e^{-\int f(x)dx},$$

die inhomogene Differenzialgleichung:

$$y = \int g(x) \cdot e^{\int f(x)dx} dx \cdot e^{-\int f(x)dx} + C \cdot e^{-\int f(x)dx}.$$

II. Die homogene Differenzialgleichung $y' - \frac{y}{x} = y' - \frac{1}{x}y = 0$ hat die allgemeine Lösung:

$$y = C \cdot e^{-\int -\frac{1}{x}dx} = C \cdot e^{\int \frac{1}{x}dx} = C \cdot e^{\ln|x|} = C \cdot x.$$

Die partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung $y' - \frac{y}{x} = 1 - \frac{1}{x}$ bestimmt sich als:

$$y = \int \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\int -\frac{1}{x}dx} dx \cdot e^{-\int -\frac{1}{x}dx} = \int \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-\int \frac{1}{x}dx} dx \cdot e^{\int \frac{1}{x}dx} = \int \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-\ln|x|} dx \cdot e^{\ln|x|} =$$

$$\int \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{e^{\ln|x|}} dx \cdot e^{\ln|x|} = \int \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} dx \cdot x = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx \cdot x = \int \left(x^{-1} - x^{-2}\right) dx \cdot x =$$

$$(\ln|x| + x^{-1}) \cdot x = \left(\ln|x| + \frac{1}{x}\right) \cdot x = x\ln|x| + 1$$

u.a. mit Hilfe der Exponential- und Logarithmengesetze. Als Lösung der Differenzialgleichung ergibt sich somit:

$$y = C \cdot x + x\ln|x| + 1.$$

Wir verwenden noch die Anfangsbedingung y(1) = 4 und erhalten:

$$y(1) = C \cdot 1 + 1 \cdot \ln|1| + 1 = C + 1 = 4 \Leftrightarrow \text{C = 3.}$$

Die gesuchte Lösung der Differenzialgleichung lautet damit:

$$y = 3x + x\ln|x| + 1.$$

www.michael-buhlmann.de / 06.2015 / Aufgabe 123