

# Mathematikaufgaben

## > Differenzialgleichungen

### > linear, 1. Ordnung

---

**Aufgabe:** Löse die lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung:

$$y' - \frac{y}{x} = 1 - \frac{1}{x}, y(1) = 4.$$

**Lösung:** I. Allgemein gilt: Eine Differenzialgleichung der Form

$$y' + f(x)y = g(x)$$

heißt lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung mit  $g(x)$  als Störfunktion. Ist  $g(x) = 0$ , so ist die Differenzialgleichung homogen, ansonsten inhomogen. Die homogene lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung hat die Lösung:

$$y = C \cdot e^{-\int f(x)dx},$$

die inhomogene Differenzialgleichung:

$$y = \int g(x) e^{\int f(x)dx} dx \cdot e^{-\int f(x)dx} + C \cdot e^{-\int f(x)dx}.$$

II. Die homogene Differenzialgleichung  $y' - \frac{y}{x} = y' - \frac{1}{x}y = 0$  hat die allgemeine Lösung:

$$y = C \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx} = C \cdot e^{\int \frac{1}{x} dx} = C \cdot e^{\ln|x|} = C \cdot x.$$

Die partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung  $y' - \frac{y}{x} = 1 - \frac{1}{x}$  bestimmt sich als:

$$y = \int \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\int \frac{1}{x} dx} dx \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx} = \int \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx \cdot e^{\int \frac{1}{x} dx} = \int \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-\ln|x|} dx \cdot e^{\ln|x|} =$$

$$\int \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{e^{\ln|x|}} dx \cdot e^{\ln|x|} = \int \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} dx \cdot x = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx \cdot x = \int (x^{-1} - x^{-2}) dx \cdot x =$$

$$(\ln|x| + x^{-1}) \cdot x = \left(\ln|x| + \frac{1}{x}\right) \cdot x = x \ln|x| + 1$$

u.a. mit Hilfe der Exponential- und Logarithmengesetze. Als Lösung der Differenzialgleichung ergibt sich somit:

$$y = C \cdot x + x \ln|x| + 1.$$

Wir verwenden noch die Anfangsbedingung  $y(1) = 4$  und erhalten:

$$y(1) = C \cdot 1 + 1 \cdot \ln|1| + 1 = C + 1 = 4 \Leftrightarrow C = 3.$$

Die gesuchte Lösung der Differenzialgleichung lautet damit:

$$y = 3x + x \ln|x| + 1.$$