Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> linear, 1. Ordnung

Aufgabe: Löse die Differenzialgleichung mit Anfangsbedingung:

$$y'-\frac{5}{x}y = x^2 \text{, y(1) = 0.}$$

1. Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differenzialgleichung der Form

$$y' = f(x)y + g(x)$$

heißt lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung mit g(x) als Störfunktion. Ist g(x) = 0, so ist die Differenzialgleichung homogen, ansonsten inhomogen. Die homogene lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung hat die Lösung:

$$y = C\cdot e^{\int f(x)dx},$$

die inhomogene Differenzialgleichung:

$$y = \int g(x)\cdot e^{-\int f(x)dx}dx\cdot e^{\int f(x)dx} + C\cdot e^{\int f(x)dx}.$$

II. Wir formen die Differenzialgleichung $y'-\frac{5}{x}y = x^2$ um zu: $y' = \frac{5}{x}y + x^2$. Mit $f(x) = \frac{5}{x}$ und $g(x) = x^2$ berechnet sich die Lösung der Differenzialgleichung als:

$$y = \int g(x)\cdot e^{-\int f(x)dx}dx\cdot e^{\int f(x)dx} + C\cdot e^{\int f(x)dx} = \int x^2\cdot e^{-\int \frac{5}{x}dx}dx\cdot e^{\int \frac{5}{x}dx} + C\cdot e^{\int \frac{5}{x}dx},$$

wobei für den homogenen und nichthomogenen (partikulären) Anteil der Lösung gilt:

$$y_H = C\cdot e^{\int \frac{5}{x}dx} = C\cdot e^{5\ln(x)} = C\cdot\left(e^{\ln(x)}\right)^5 = C\cdot x^5$$

$$y_P = \int x^2\cdot e^{-\int \frac{5}{x}dx}dx\cdot e^{\int \frac{5}{x}dx} = \int x^2\cdot e^{-5\ln(x)}dx\cdot e^{5\ln(x)} = \int x^2\cdot\left(e^{\ln(x)}\right)^{-5}dx\cdot\left(e^{\ln(x)}\right)^5 =$$

$$\int x^2\cdot x^{-5}dx\cdot x^5 = \int x^{-3}dx\cdot x^5 = -\frac{1}{2}x^{-2}\cdot x^5 = -\frac{1}{2}x^3.$$

Die Lösung der linearen Differenzialgleichung 1. Ordnung ist damit:

$$y = y_P + y_H = -\frac{1}{2}x^3 + Cx^5.$$

III. Die Anfangsbedingung ist y(1) = 0. Einsetzen in $y = -\frac{1}{2}x^3 + C\cdot x^5$ ergibt daher:

$$y(1) = -\frac{1}{2}\cdot 1^3 + C\cdot 1^5 = -\frac{1}{2} + C = 0 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}.$$

Die gesuchte Lösung der Differenzialgleichung mit Anfangsbedingung lautet damit:

$$y = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2} \cdot x^5 = \frac{x^5 - x^3}{2}.$$

2. Lösung: I. Allgemein gilt: Eine homogene Differenzialgleichung der Form:

$$y'(x) + f(x) \cdot y = 0$$

ist durch Trennung der Variablen vermöge der unbestimmten Integrale:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int f(x)dx + C_1$$

mit der Integrationskonstante C_1 allgemein lösbar. Es ergibt sich die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung:

$$y = Ce^{-\int f(x)dx}$$

mit Integrationskonstante C, Cε**R**.

II. Für eine Differenzialgleichung der Form:

$$y'(x) + f(x) \cdot y = g(x)$$

ist: $y'(x) + f(x) \cdot y = 0$ die homogene Differenzialgleichung; die Lösung ist: $y_h(x) = Ce^{-\int f(x)dx}$ mit Integrationskonstante C. Für die inhomogene Differenzialgleichung: $y'(x) + f(x) \cdot y = g(x)$ mit g(x) ≠ 0 gilt dann durch Variation der Konstanten C zu einer Funktion C(x) die Beziehung:

$$y(x) = C(x)e^{-\int f(x)dx} \Rightarrow y'(x) = \left(C'(x) - f(x)C(x)\right)e^{-\int f(x)dx},$$

so dass sich eine Differenzialgleichung in C(x) ergibt:

$$\left(C'(x) - f(x)C(x)\right)e^{-\int f(x)dx} + f(x) \cdot C(x)e^{-\int f(x)dx} = g(x),$$

die, nach C'(x) umgestellt:

$$C'(x) = g(x) \cdot e^{\int f(x)dx},$$

durch Integration von C'(x) zu C(x) zur partikulären Lösung $y_P(x) = \int g(x) \cdot e^{\int f(x)dx}dx$ der inhomogenen Differenzialgleichung führt. Die Gesamtlösung ist: $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$. Die Integrationskonstante C der Lösung der homogenen Differenzialgleichung bestimmt sich, falls vorhanden, aus der Anfangsbedingung der Differenzialgleichung y(a) = b, so dass sich in eindeutiger Weise eine spezielle Lösung für die Funktion y(x) ergibt.

III. Wir betrachten die homogene Differenzialgleichung $y' - \frac{5}{x}y = 0$ und führen hier die Trennung der Variablen durch:

$y' - \frac{5}{x}y = 0$	$\mid + \frac{5}{x}y$
$y' = \frac{5}{x}y$	(Ersetzen: $y' = \frac{dz}{dx}$)
$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{x}y$	$\mid \cdot dx$
$dy = \frac{5}{x}dx \cdot y$	$\mid :y$
$\frac{dy}{y} = \frac{5}{x}dx$	(Variablen getrennt, Integration mit Integrationskonstante C_1)
$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{5}{x}dx + C_1$	(Berechnung der Integrale)

$\ln|y| = 5\ln|x| + C_1$ | $e^{()}$ (mit: C = e^{C_1})

$y = e^{5\ln|x|+C_1} = e^{5\ln|x|} \cdot e^{C_1} = \cdot\left(e^{\ln|x|}\right)^5 \cdot e^{C_1} = x^5 \cdot C$

$y = Cx^5$

Wir erhalten damit $y_H(x) = Cx^5$ als Lösung der homogenen Differenzialgleichung.

IV. Zur inhomogenen Differenzialgleichung $y' - \frac{5}{x}y = x^2$ führen wir eine Variation der Konstanten durch, indem wir in der Lösung der homogenen Differenzialgleichung $y_H(x) = Cx^5$ die Konstante C zu einer Funktion C(x) machen. Es gilt der Ansatz: $y(x) = C(x)x^5$ bei: $y'(x) = C'(x)x^5 + C(x)\cdot 5x^4 = C'(x)x^5 + 5C(x)x^4$ gemäß der Produktregel. Die Differenzialgleichung $y' - \frac{5}{x}y = x^2$ wird damit zu:

$$y' - \frac{5}{x}y = x^2 \Rightarrow C'(x)x^5 + 5C(x)x^4 - \frac{5}{x}C(x)x^5 = C'(x)x^5 + 5C(x)x^4 - 5C(x)x^4 =$$

$$C'(x)x^5 = x^2.$$

Teilen durch x^5 und anschließende Integration führt auf:

$C'(x)x^5 = x^2$ | $:x^5$

$C'(x) = x^{-3}$ (Integration)

$C(x) = \int x^{-3}dx$ (Stammfunktion)

$C(x) = -\frac{1}{2}x^{-2}.$

Dann ist: $y_P(x) = C(x)x^5 = -\frac{1}{2}x^{-2} \cdot x^5 = -\frac{1}{2}x^3$ die partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung. Als Gesamtlösung ergibt sich: $y(x) = y_H(x) + y_P(x) = Cx^5 - \frac{1}{2}x^3$.

V. Die Anfangsbedingung ist y(1) = 0. Einsetzen in $y = Cx^5 - \frac{1}{2}x^3$ ergibt daher:

$$y(1) = C \cdot 1^5 - \frac{1}{2} \cdot 1^3 = C - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}.$$

Die gesuchte Lösung der Differenzialgleichung mit Anfangsbedingung lautet damit:

$$y = \frac{1}{2} \cdot x^5 - \frac{1}{2}x^3 = \frac{x^5 - x^3}{2}.$$

www.michael-buhlmann.de / 11.2024 / Aufgabe 2257