

Mathematikaufgaben

> Differenzialgleichungen

> linear, konstante Koeffizienten

Aufgabe: Bestimme die allgemeine Lösung der linearen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$y'' - 4y = x.$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = g(x) \quad (*)$$

heißt lineare Differentialgleichung n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und $g(x)$ als Störfunktion. Ist $g(x) = 0$, so ist die Differentialgleichung homogen, ansonsten inhomogen. Die Gleichung

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

heißt charakteristische Gleichung der Differentialgleichung (*) und hat n reelle bzw. komplexe Lösungen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Im Falle reeller Lösungen, die paarweise verschieden sind, ergibt sich die allgemeine Lösung: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$. Die partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Differentialgleichung (*) lässt sich gemäß des Typs der Störfunktion $g(x)$ durch einen speziellen Lösungsansatz bestimmen; d.h. mit ganz rationalem $g(x)$ vom Grad n und falls $\lambda=0$ keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $y_p = A + Bx + \dots + Zx^n$ und lässt sich über die Methode des Koeffizientenvergleichs bestimmen.

II. Die Lösung der homogenen Differentialgleichung $y'' - 4y = 0$ bestimmt sich durch die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2.$$

Die allgemeine Lösung lautet damit:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}.$$

Für die Inhomogenität $g(x) = x$ (ganz rationale Funktion vom Grad 1) ergibt sich als Ansatz:

$$y_p = A + Bx.$$

Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung führt wegen $y_p' = B$ und $y_p'' = 0$ auf:

$$0 - 4(A+Bx) = x \Leftrightarrow -4A - 4Bx = x,$$

so dass mit Koeffizientenvergleich folgt: $-4A = 0$, $-4B = 1$ und damit: $A = 0$, $B = -1/4$. Es gilt also:

$$y_p = -\frac{1}{4}x.$$

Die gesamte Lösung der Differentialgleichung lautet damit:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} - \frac{1}{4}x.$$