Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> linear, konstante Koeffizienten

Aufgabe: Bestimme die allgemeine Lösung der linearen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$y'' + y' - 2y = e^x.$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = g(x) \quad (*)$$

heißt lineare Differentialgleichung n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und g(x) als Störfunktion. Ist g(x) = 0, so ist die Differentialgleichung homogen, ansonsten inhomogen. Die Gleichung

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

heißt charakteristische Gleichung der Differentialgleichung (*) und hat n reelle bzw. komplexe Lösungen λ_1, … λ_n. Im Falle reeller Lösungen, die paarweise verschieden sind, ergibt sich die allgemeine Lösung: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + ... + C_n e^{\lambda_n x}$. Die partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Differentialgleichung (*) lässt sich gemäß des Typs der Störfunktion g(x) durch einen speziellen Lösungsansatz bestimmen; d.h. mit $g(x) = e^{cx}$ als Exponentialfunktion und falls λ=c keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $y_p = Ae^{cx}$, falls λ=c eine Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $y_p = Axe^{cx}$.

II. Die Lösung der homogenen Differenzialgleichung y'' + y' – 2 = 0 bestimmt sich durch die charakteristische Gleichung:

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{2{,}25} = -\frac{1}{2} \pm 1{,}5 \Leftrightarrow \lambda = -2, \lambda = 1.$

Die Lösung der homogenen Differenzialgleichung lautet damit:

$y = C_1e^{-2x} + C_2e^x$.

Die Störfunktion $g(x) = e^x$ (Exponentialfunktion $g(x) = e^{cx}$ mit c=1) ist in der Lösung der homogenen Differenzialgleichung enthalten (c=λ=1 als Lösung der charakteristischen Gleichung), so dass unser Ansatz nun lauten muss:

$y_p = Axe^x$ mit: $y_p' = Ae^x + Axe^x$, $y_p'' = Ae^x + Ae^x + Axe^x = 2Ae^x + Axe^x$.

Einsetzen in die inhomogene Differenzialgleichung ergibt:

$2Ae^x + Axe^x + Ae^x + Axe^x - 2Axe^x = e^x \Leftrightarrow 3Ae^x = e^x \Leftrightarrow 3A = 1 \Leftrightarrow A = 1/3$.

Mit $y_p = \frac{1}{3}xe^x$ als partikulärer Lösung ergibt sich die Gesamtlösung der Differenzialgleichung:

$y = C_1e^{-2x} + C_2e^x + \frac{1}{3}xe^x$.

www.michael-buhlmann.de / 06.2015 / Aufgabe 119