Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> linear, konstante Koeffizienten

Aufgabe: Bestimme die allgemeine Lösung der linearen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$y' + 2y = x^2+x.$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = g(x) \quad (*)$$

heißt lineare Differentialgleichung n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und g(x) als Störfunktion. Ist g(x) = 0, so ist die Differentialgleichung homogen, ansonsten inhomogen. Die Gleichung

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

heißt charakteristische Gleichung der Differentialgleichung (*) und hat n reelle bzw. komplexe Lösungen λ_1, … λ_n. Im Falle reeller Lösungen, die paarweise verschieden sind, ergibt sich die allgemeine Lösung: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + ... + C_n e^{\lambda_n x}$. Die partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Differentialgleichung (*) lässt sich gemäß des Typs der Störfunktion g(x) durch einen speziellen Lösungsansatz bestimmen; d.h. mit ganz rationalem g(x) vom Grad n und falls λ=0 keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $y_p = A + Bx + … + Zx^n$ und lässt sich über die Methode des Koeffizientenvergleichs bestimmen.

II. Die Lösung der homogenen Differenzialgleichung y' + 2y = 0 bestimmt sich durch die charakteristische Gleichung:

$\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$.

Die allgemeine Lösung lautet damit:

$y = C_1 e^{-2x}$.

Für die Inhomogenität $g(x) = x^2+x$ (ganz rationale Funktion vom Grad 2) ergibt sich als Ansatz:

$y_p = A + Bx + Cx^2$.

Einsetzen in die inhomogene Differenzialgleichung führt wegen $y_p' = B + 2Cx$ auf:

$B + 2Cx + 2(A+Bx+Cx^2) = x^2+x \Leftrightarrow (2A+B) + (B+2C)x + 2Cx^2 = 0 + 1x + 1x^2$,

so dass gemäß Koeffizientenvergleich das folgende lineare Gleichungssystem greift:

2A + B = 0
B + 2C = 1
2C = 1.

Wir rechnen: 2C =1 => C = 0,5, weiter: B + 1 = 1 => B = 0 sowie: 2A + 0 = 0 => A = 0. Als Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung ergibt sich:

$y_p = 0{,}5x^2$.

Die gesamte Lösung der Differenzialgleichung lautet damit:

$y = C_1 e^{-2x} + 0{,}5x^2$.

www.michael-buhlmann.de / 05.2021 / Aufgabe 1390