

Mathematikaufgaben

> Differenzialgleichungen

> linear, konstante Koeffizienten

Aufgabe: Bestimme die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$y'' + 8y' + 15y = 0.$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (*)$$

heißt lineare Differentialgleichung n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Differentialgleichung ist homogen. Die Gleichung

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

heißt charakteristische Gleichung der Differentialgleichung (*) und hat n reelle bzw. komplexe Lösungen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Im Falle reeller Lösungen, die paarweise verschieden sind, ergibt sich die allgemeine Lösung: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$.

II. Die Lösung der homogenen Differenzialgleichung $y'' + 8y' + 15y = 0$ bestimmt sich durch die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 8\lambda + 15 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2 \cdot 1} = \frac{-8 \pm 2}{2} = -4 \pm 1 \Leftrightarrow \lambda = -5, \lambda = -3.$$

Die allgemeine Lösung lautet damit:

$$y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-3x}.$$