Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> linear, konstante Koeffizienten

Aufgabe: Bestimme die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (*)$$

heißt lineare Differentialgleichung n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Differentialgleichung ist homogen. Die Gleichung

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

heißt charakteristische Gleichung der Differentialgleichung (*) und hat n reelle bzw. komplexe Lösungen λ_1, … λ_n. Im Falle reeller Lösungen, die paarweise verschieden sind, ergibt sich die allgemeine Lösung: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + ... + C_n e^{\lambda_n x}$. Treten paarweise verschiedene komplexe Lösungen als Lösungen der charakteristischen Gleichung (*) auf, so ist mit zwei zueinander konjugierten Lösungen $\alpha+i\beta$, $\alpha-i\beta$ zudem: $y = ... + e^{\alpha x}(C_i \cos(\beta x) + C_{i+1} \sin(\beta x)) + ...$ für gewisse i = 1, … n-1.

II. Die Lösung der homogenen Differenzialgleichung $y'' + 4y' + 13y = 0$ bestimmt sich durch die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 1\cdot 13}}{2\cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i \Leftrightarrow$$

$\lambda = -2-3i$, $\lambda = -2+3i$.

Die allgemeine Lösung lautet damit:

$y = e^{-2x}(C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x))$.

www.michael-buhlmann.de / 05.2021 / Aufgabe 1392