Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> linear, konstante Koeffizienten

Aufgabe: Bestimme die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten als Anfangswertproblem:

$$y'' + 8y' + 15y = 0,\ y(0) = y'(0) = 1.$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (*)$$

heißt lineare Differentialgleichung n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Differentialgleichung ist homogen. Die Gleichung

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

heißt charakteristische Gleichung der Differentialgleichung (*) und hat n reelle bzw. komplexe Lösungen λ_1, … λ_n. Im Falle reeller Lösungen, die paarweise verschieden sind, ergibt sich die allgemeine Lösung: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + ... + C_n e^{\lambda_n x}$.

II. Die Lösung der homogenen Differenzialgleichung $y'' + 8y' + 15y = 0$ bestimmt sich durch die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 8\lambda + 15 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4\cdot 1\cdot 15}}{2\cdot 1} = \frac{-8 \pm 2}{2} = -4 \pm 1 \Leftrightarrow \lambda = -5,\ \lambda = -3.$$

Die allgemeine Lösung lautet damit:

$y = C_1e^{-5x} + C_2e^{-3x}$.

III. Wir bilden zu $y = C_1e^{-5x} + C_2e^{-3x}$ die 1. Ableitung: $y' = -5C_1e^{-6x} - 3C_2e^{-3x}$ und haben auf Grund der Anfangswertbedingungen: $y(0) = y'(0) = 1$ mit:

$y(0) = C_1 + C_2 = 1$
$y'(0) = -5C_1 - 3C_2 = 1$

ein lineares Gleichungssystem, das wir wie folgt lösen:

$C_1 + C_2 = 1 \Rightarrow C_1 = 1 - C_2$
$-5C_1 - 3C_2 = 1 \Rightarrow -5(1-C_2) - 3C_2 = 1 \Rightarrow -5 + 5C_2 - 3C_2 = 1 \Rightarrow 2C_2 = 6 \Rightarrow C_2 = 3$
$C_2 = 3 \Rightarrow C_1 = 1 - 3 = -2$.

Die gesuchte Lösung der Differenzialgleichung, die die Anfangswertbedingungen erfüllt, lautet damit:

$y = -2e^{-5x} + 3e^{-3x}$.

www.michael-buhlmann.de / 05.2021 / Aufgabe 1393