Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> linear, konstante Koeffizienten

Aufgabe: Bestimme die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten als Anfangswertproblem:

$$y'' + 4y' + 4y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (*)$$

heißt <u>lineare Differentialgleichung n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten</u>. Die Differentialgleichung ist homogen. Die Gleichung

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

heißt charakteristische Gleichung der Differentialgleichung (*) und hat n reelle bzw. komplexe Lösungen $\lambda_1, \ldots \lambda_n$. Im Falle reeller Lösungen, die paarweise verschieden sind, ergibt sich die allgemeine Lösung: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}$. Tritt eine Nullstelle λ_i mit Vielfachheit m_i auf, so gilt: $y = \ldots + C_{i0} e^{\lambda_i x} + C_{i1} x e^{\lambda_i x} + \ldots + C_{im_i} x^{m_i - 1} e^{\lambda_i x} + \ldots$ für gewisse i = 1, … n-1.

II. Die Lösung der homogenen Differenzialgleichung $y'' + 4y' + 4y = 0$ bestimmt sich durch die charakteristische Gleichung:

$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-4 \pm 0}{2} = -4 \Leftrightarrow \lambda = -2$ (mit Vielfachheit 2).

Die <u>allgemeine Lösung</u> lautet damit:

$y = C_{11}e^{-2x} + C_{12}xe^{-2x} = (C_{11}+C_{12}x)e^{-2x}$.

III. Wir bilden zu $y = (C_{11}+C_{12}x)e^{-2x}$ mit der Produktregel für das Ableiten die 1. Ableitung:

$y' = C_{12}e^{-2x} - 2(C_{11}+C_{12}x)e^{-2x} = (-2C_{11}+C_{12}-2C_{12}x)e^{-2x}$

und haben auf Grund der <u>Anfangswertbedingungen</u>: $y(0) = y'(0) = 2$:

$y(0) = C_{11} + C_{12}\cdot 0 = 1 \Rightarrow C_{11} = 1$
$y'(0) = -2C_{11} + C_{12} - 2C_{12}\cdot 0 = 2 \Rightarrow -2 + C_{12} = 2 \Rightarrow C_{12} = 4.$

Die gesuchte Lösung der Differenzialgleichung, die die Anfangswertbedingungen erfüllt, lautet damit:

$y = e^{-2x} + 4xe^{-2x} = (1+4x)e^{-2x}$.

IV. Wir führen noch eine <u>Probe</u> durch und ermitteln zu $y = (1+4x)e^{-2x}$ die Ableitungen:

$y' = 4e^{-2x} - 2(1+4x)e^{-2x} = (2-8x)e^{-2x}$
$y'' = -8e^{-2x} - 2(2-8x)e^{-2x} = (-12+16x)e^{-2x}$,

so dass folgt:

$y'' + 4y' + 4y = (-12+16x)e^{-2x} + 4(2-8x)e^{-2x} + 4(1+4x)e^{-2x} = (-12+16x+8-32x+4+16x)e^{-2x} = 0\cdot e^{-2x} = 0$,
$y(0) = (1+4\cdot 0)\cdot e^0 = 1$,
$y'(0) = (2-8\cdot 0)\cdot e^0 = 2$,

womit die Richtigkeit des errechneten Ergebnisses nachgewiesen ist.

www.michael-buhlmann.de / 05.2021 / Aufgabe 1394