

# Mathematikaufgaben

## > Differenzialgleichungen

### > linear, konstante Koeffizienten

**Aufgabe:** Bestimme die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten als Anfangswertproblem:

$$y'' + 4y' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

**Lösung:** I. Allgemein gilt: Eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (*)$$

heißt lineare Differentialgleichung n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Differentialgleichung ist homogen. Die Gleichung

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

heißt charakteristische Gleichung der Differentialgleichung (\*) und hat n reelle bzw. komplexe Lösungen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Im Falle reeller Lösungen, die paarweise verschieden sind, ergibt sich die allgemeine Lösung:  $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$ . Tritt eine Lösung  $\lambda_i$  mit Vielfachheit  $m_i$  auf, so gilt:

$$y = \dots + (C_{i0} + C_{i1}x + \dots + C_{im_i} x^{m_i-1}) e^{\lambda_i x} + \dots \text{ für gewisse } i = 1, \dots, n.$$

II. Die Lösung der homogenen Differentialgleichung  $y'' + 4y' + 4y = 0$  bestimmt sich durch die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 0}{2} = -2 \Leftrightarrow \lambda = -2 \text{ (mit Vielfachheit 2)}.$$

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet damit:

$$y = (C_{11} + C_{12}x)e^{-2x}.$$

III. Wir bilden zu  $y = (C_{11} + C_{12}x)e^{-2x}$  mit der Produktregel für das Ableiten die 1. Ableitung:

$$y' = C_{12}e^{-2x} - 2(C_{11} + C_{12}x)e^{-2x} = (-2C_{11} + C_{12} - 2C_{12}x)e^{-2x}$$

und haben auf Grund der Anfangswertbedingungen:  $y(0) = y'(0) = 2$ :

$$y(0) = C_{11} + C_{12} \cdot 0 = 1 \Rightarrow C_{11} = 1$$

$$y'(0) = -2C_{11} + C_{12} - 2C_{12} \cdot 0 = 2 \Rightarrow -2 + C_{12} = 2 \Rightarrow C_{12} = 4.$$

Die gesuchte Lösung der Differentialgleichung, die die Anfangswertbedingungen erfüllt, lautet damit:

$$y = e^{-2x} + 4xe^{-2x} = (1+4x)e^{-2x}.$$

IV. Wir führen noch eine Probe durch und ermitteln zu  $y = (1+4x)e^{-2x}$  die Ableitungen:

$$y' = 4e^{-2x} - 2(1+4x)e^{-2x} = (2-8x)e^{-2x}$$

$$y'' = -8e^{-2x} - 2(2-8x)e^{-2x} = (-12+16x)e^{-2x},$$

so dass folgt:

$$y'' + 4y' + 4y = (-12+16x)e^{-2x} + 4(2-8x)e^{-2x} + 4(1+4x)e^{-2x} = (-12+16x+8-32x+4+16x)e^{-2x} = 0 \cdot e^{-2x} = 0,$$

$$y(0) = (1+4 \cdot 0) \cdot e^0 = 1,$$

$$y'(0) = (2-8 \cdot 0) \cdot e^0 = 2,$$

womit die Richtigkeit des errechneten Ergebnisses nachgewiesen ist.