

Mathematikaufgaben

> Differenzialgleichungen

> linear, konstante Koeffizienten

Aufgabe: Bestimme die allgemeine Lösung der linearen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$y' + 2y = e^{-2x}.$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = g(x) \quad (*)$$

heißt lineare Differentialgleichung n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und $g(x)$ als Störfunktion. Ist $g(x) = 0$, so ist die Differentialgleichung homogen, ansonsten inhomogen. Die Gleichung

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

heißt charakteristische Gleichung der Differentialgleichung (*) und hat n reelle bzw. komplexe Lösungen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Im Falle reeller Lösungen, die paarweise verschieden sind, ergibt sich die allgemeine Lösung: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$. Die partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Differentialgleichung (*) lässt sich gemäß des Typs der Störfunktion $g(x)$ durch einen speziellen Lösungsansatz bestimmen; d.h. mit $g(x) = e^{cx}$ als Exponentialfunktion und falls $\lambda=c$ keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $y_p = Ae^{cx}$, falls $\lambda=c$ eine Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $y_p = Axe^{cx}$.

II. Die Lösung der homogenen Differentialgleichung $y' + 2y = 0$ bestimmt sich durch die charakteristische Gleichung:

$$\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2.$$

Die allgemeine Lösung lautet damit:

$$y = C_1 e^{-2x}.$$

Für die Inhomogenität $g(x) = e^{-2x}$ ergibt sich der Ansatz:

$$y_p = Axe^{-2x},$$

da $g(x) = e^{-2x}$ Teil der homogenen Lösung $y = C_1 e^{-2x}$ ist. Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung führt wegen $y_p' = Ae^{-2x} - 2Axe^{-2x}$ (Produktregel für das Ableiten) auf:

$$Ae^{-2x} - 2Axe^{-2x} + 2Axe^{-2x} = e^{-2x} \Leftrightarrow Ae^{-2x} = e^{-2x},$$

so dass

$$A = 1$$

gilt und damit:

$$y_p = xe^{-2x}.$$

Die gesamte Lösung der Differentialgleichung lautet damit:

$$y = C_1 e^{-2x} + xe^{-2x} = (C_1 + x)e^{-2x}.$$