Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> linear, konstante Koeffizienten

Aufgabe: Bestimme die allgemeine Lösung der linearen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$y^{(4)} + 4y''' + 5y'' + 4y' + 4y = 2(x+10).$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_n y = g(x) \quad (*)$$

heißt lineare Differentialgleichung n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und g(x) als Störfunktion. Ist g(x) = 0, so ist die Differentialgleichung homogen, ansonsten inhomogen. Die Gleichung

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

heißt charakteristische Gleichung der Differentialgleichung (*) und hat n reelle bzw. komplexe Lösungen λ_1, … λ_n. Im Falle reeller Lösungen, die paarweise verschieden sind, ergibt sich die allgemeine Lösung: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + ... + C_n e^{\lambda_n x}$. Tritt eine Nullstelle λ_i mit Vielfachheit m_i auf, so gilt: $y = ... + C_{i0} e^{\lambda_i x} + C_{i1} x e^{\lambda_i x} + ... + C_{im_i} x^{m_i - 1} e^{\lambda_i x} + ...$ für gewisse i = 1, … n-1. Treten paarweise verschiedene komplexe Lösungen als Lösungen der charakteristischen Gleichung (*) auf, so ist mit zwei zueinander konjugierten Lösungen α+iβ, α–iβ zudem: $y = ... + e^{\alpha x}(C_i \cos(\beta x) + C_{i+1}\sin(\beta x)) + ...$ für gewisse i = 1, … n-1. Die partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Differentialgleichung (*) lässt sich gemäß des Typs der Störfunktion g(x) durch einen speziellen Lösungsansatz bestimmen; d.h. mit ganz rationalem g(x) vom Grad n und falls λ=0 keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $y_p = A + Bx + … + Zx^n$ und lässt sich über die Methode des Koeffizientenvergleichs bestimmen.

II. Die Lösung der homogenen Differenzialgleichung $y^{(4)} + 4y''' + 5y'' + 4y' + 4y = 0$ bestimmt sich durch die charakteristische Gleichung:

$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 5\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$ (zweifach), $\lambda = -i$, $\lambda = i$ (konjugiert komplex $\lambda = 0 \pm i$)

(mit i als imäginär-komplexer Einheit, z.B. auf Grund der Lösungsformel(n) für ganz rationale Gleichungen 4. Grades). Die allgemeine Lösung lautet damit:

$y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + C_3\cos(x) + C_4\sin(x)$.

III. Für die Inhomogenität g(x) = 2(x+10) = 2x + 20 ergibt sich der Ansatz:

$y_p = A + Bx$.

Einsetzen in die inhomogene Differenzialgleichung führt wegen $y_p' = B$, $y_P'' = y_P''' = y_P^{(4)} = 0$ auf:

$0 + 0 + 0 + 4B + 4(A+Bx) = 2x+10 \Leftrightarrow 4Bx + 4(A+B) = 2x + 20$,

so dass mit Koeffizientenvergleich

$4B = 2$
$4(A+B) = 20$

gilt und damit:

$B = 0{,}5 \Rightarrow A + 0{,}5 = 5 \Rightarrow A = 4{,}5$.

Die partikuläre Lösung der Differenzialgleichung ist also:

$y_p = 4{,}5 + 0{,}5x$.

Die gesamte Lösung der Differenzialgleichung lautet damit:

$y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + C_3\cos(x) + C_4\sin(x) + 0{,}5x + 4{,}5$.

www.michael-buhlmann.de / 05.2021 / Aufgabe 1407