Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> linear, konstante Koeffizienten

Aufgabe: Bestimme die allgemeine Lösung der linearen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}.$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = g(x) \quad (*)$$

heißt <u>lineare Differentialgleichung</u> n. Ordnung <u>mit konstanten Koeffizienten</u> und g(x) als Störfunktion. Ist g(x) = 0, so ist die Differentialgleichung homogen, ansonsten inhomogen. Die Gleichung

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

heißt charakteristische Gleichung der Differentialgleichung (*) und hat n reelle bzw. komplexe Lösungen λ_1, … λ_n. Im Falle reeller Lösungen, die paarweise verschieden sind, ergibt sich die allgemeine Lösung: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + ... + C_n e^{\lambda_n x}$. Tritt eine Nullstelle λ_i mit Vielfachheit m_i auf, so gilt: $y = ... + C_{i0} e^{\lambda_i x} + C_{i1} x e^{\lambda_i x} + ... + C_{im_i} x^{m_i - 1} e^{\lambda_i x} + ...$ für gewisse i = 1, … n-1. Die partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Differentialgleichung (*) lässt sich gemäß des Typs der Störfunktion g(x) durch einen speziellen Lösungsansatz bestimmen; d.h. mit $g(x) = e^{cx}$ als Exponentialfunktion und falls λ=c keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $y_p = Ae^{cx}$, falls λ=c eine Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $y_p = Axe^{cx}$ oder $y_p = Ax^2e^{cx}$ usw. je nach Vielfachheit der Lösung λ=c.

II. Die Lösung der homogenen Differenzialgleichung y'' + 2y' + y = 0 bestimmt sich durch die charakteristische Gleichung:

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$

als doppelte Nullstelle der charakteristischen Gleichung. Die allgemeine Lösung lautet damit:

$y = (C_1+C_2x)e^{-x}$.

Für die Inhomogenität $g(x) = e^{-x}$ ergibt sich wegen der doppelte Nullstelle λ = -1 der Ansatz:

$y_p = Ax^2e^{-x}$,

da $g(x) = e^{-x}$ Teil der homogenen Lösung $y = (C_1+C_2x)e^{-x}$ ist. Einsetzen in die inhomogene Differenzialgleichung führt wegen:

$y_p' = 2Axe^{-x} – Ax^2e^{-x} = A(2x-x^2)e^{-x}$
$y_p'' = A(2-2x)e^{-x} – A(2x-x^2)e^{-x} = A(2-4x+x^2)e^{-x}$

(Produktregel für das Ableiten, Zusammenfassen) auf Ansatz und Umformungen:

$A(2-4x+x^2)e^{-x} + 2 A(2x-x^2)e^{-x} + Ax^2e^{-x} = e^{-x}$ | $:e^{-x}$
$A(2-4x+x^2) + 2 A(2x-x^2) + Ax^2 = 1$ (Sortieren)
$2A + Ax(-4+4) +Ax^2(1-2+1) = 1$
$2A = 1$
$A = 0{,}5$.

Damit ist die partikuläre Lösung:

$y_p = 0{,}5x^2e^{-x}$.

Die gesamte <u>Lösung</u> der Differenzialgleichung lautet damit:

$y = (C_1+C_2x)e^{-x} + 0{,}5x^2e^{-x} = (C_1+C_2x+0{,}5x^2)e^{-x}$.

www.michael-buhlmann.de / 07.2021 / Aufgabe 1455