Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> linear, konstante Koeffizienten

Aufgabe: Bestimme die allgemeine Lösung der linearen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$y'' + 4y' + 5y = e^{-2t},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

1. Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differenzialgleichung der Form

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_n y = g(t) \quad (*)$$

heißt <u>lineare Differenzialgleichung</u> n. Ordnung <u>mit konstanten Koeffizienten</u> und g(t) als Störfunktion. Ist g(t) = 0, so ist die Differenzialgleichung homogen, ansonsten inhomogen. Die Gleichung

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

heißt <u>charakteristische Gleichung</u> der Differenzialgleichung (*) und hat n reelle bzw. komplexe Lösungen $\lambda_1, \dots \lambda_n$. Im Falle reeller Lösungen, die paarweise verschieden sind, ergibt sich die homogene Lösung: $y_h = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t} + ... + C_ne^{\lambda_n t}$. Treten paarweise verschiedene komplexe Lösungen als Lösungen der charakteristischen Gleichung (*) auf, so ist mit zwei zueinander konjugierten Lösungen α+iβ, α–iβ zudem: $y_h = ... + e^{\alpha t}(C_i\cos(\beta t) + C_{i+1}\sin(\beta t)) + ...$ für gewisse i=1, … n-1. Die partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Differenzialgleichung (*) lässt sich gemäß des Typs der Störfunktion g(t) durch einen speziellen Lösungsansatz bestimmen; d.h. mit $g(t) = e^{ct}$ als Exponentialfunktion und falls c keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $y_p = Ae^{ct}$, falls $c=\lambda_i$ für ein gewisses i=1, … n eine einfache Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $y_p = Ate^{ct}$ usw.

II. Die Lösung der homogenen Differenzialgleichung $y'' + 4y' + 5y = 0$ bestimmt sich durch die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i\,.$$

Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung lautet mit den konjugiert komplexen Lösungen der charakteristischen Gleichung:

$y_h = e^{-2t}(C_1\cos(t)+C_2\sin(t))$.

Für die Inhomogenität $g(t) = e^{-2t}$ ergibt sich der Ansatz:

$y_p = Ae^{-2t}$,

da $g(t) = e^{-2t}$ nicht Teil der homogenen Lösung y ist. Einsetzen in die inhomogene Differenzialgleichung führt wegen $y_p' = -2Ae^{-2t}$, $y_p'' = 4Ae^{-2t}$ auf:

$4Ae^{-2t} + 4\cdot(-2Ae^{-2t}) + 5Axe^{-2t} = e^{-2t} \Leftrightarrow Ae^{-2t} = e^{-2t}$,

so dass

$A = 1$

gilt und damit:

$y_p = e^{-2t}$.

Die <u>allgemeine Lösung</u> der Differenzialgleichung lautet damit:

$y = e^{-2t}(C_1\cos(t)+C_2\sin(t)) + e^{-2t} = e^{-2t}(C_1\cos(t)+C_2\sin(t)+1)$.

III. Einsetzen der Anfangsbedingungen y(0) = 0, y'(0) = 0 führt noch wegen

$y' = -2e^{-2t}(C_1\cos(t)+C_2\sin(t)+1) + e^{-2t}(-C_1\sin(t)+C_2\cos(t)) = e^{-2t}((C_2-2C_1)\cos(t)+(-C_1-2C_2)\sin(t)-2)$
auf:

$y(0) = e^{-0}(C_1\cos(0)+C_2\sin(0)+1) = 0 \Rightarrow C_1 +1 = 0 \Rightarrow C_1 = -1$
$y'(0) = e^{-0}((C_2-2C_1)\cos(0)+(-C_1-2C_2)\sin(0)-2) = 0,\ C_1 = -1 \Rightarrow C_2+2-2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0.$

Damit erfüllt die bestimmte Lösung:

$y = e^{-2t}(-\cos(t)+1) = e^{-2t}(1-\cos(t))$

Differenzialgleichung und Anfangsbedingungen.

2. Lösung: I. Innerhalb der (reellen, komplexen) Analysis kommt der sog. Laplace-Transformation insofern eine Rolle zu, dass mit ihrer Hilfe (physikalisch-) mathematische Probleme z.B. bei Differentialgleichungen gelöst werden können. Durch Zuweisung einer Laplace-Transformierten (Bildfunktion) F(s) zur Originalfunktion (Urbildfunktion) f(t) vermittels des Laplace-Transformationsoperators $\mathfrak{L}$ gilt:

$$f(t) \overset{\mathfrak{L}}{\leftrightarrow} F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st}\,dt$$

für (reelle, komplexe) Parameter s. Die Transformation $\overset{\mathfrak{L}}{\leftrightarrow}$ heißt Korrespondenz $\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$, es gilt damit: f(t) $\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$ F(s) oder: F(s) = $\mathfrak{L}\{f(t)\}$ (Transformation) bzw. f(t) = $\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$ (Rücktransformation). Die Laplace-Transformation setzt die Existenz des die Bildfunktion F(s) definierenden (Laplace-) Integrals voraus, so dass etwa F(s) -> 0 bei s->∞ folgt. Das (uneigentliche) Integral existiert, wenn f(t) stückweise stetig und $|f(t)/e^{st}| \leq K$ mit reellem positiven K gilt.
Allgemein gelten für reelle Zahlen a, b und natürliche Zahlen n die folgenden besonderen Laplace-Transformationen laut Transformationstabelle:

Originalfunktion f(t), t≥0	**Laplace-Transformierte F(s)**
t^n	$\frac{(n-1)!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
sin(at)	$\frac{a}{s^2+a^2}$
sin(at+b)	$\frac{\sin b \cdot s + a\cos b}{s^2+a^2}$
cos(at)	$\frac{s}{s^2+a^2}$
cos(at+b)	$\frac{\cos b \cdot s + a\sin b}{s^2+a^2}$
$e^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
sinh(at)	$\frac{a}{s^2-a^2}$
cosh(at)	$\frac{s}{s^2-a^2}$

Es gelten dabei die nachstehenden Rechenregeln für Originalfunktionen f(t) und Laplace-Transformierte F(s):

a) $\mathfrak{L}\{kf(t)\} = k\mathfrak{L}\{f(t)\} = k \cdot F(s)$ (konstanter Faktor)
b) $\mathfrak{L}\{f(t) + g(t)\} = \mathfrak{L}\{f(t)\} + \mathfrak{L}\{g(t)\} = F(s) + G(s)$ (Summenregel)
c) $\mathfrak{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$ (Ähnlichkeitssatz)
d) $\mathfrak{L}\{f(t-a)\} = e^{-as} \cdot \mathfrak{L}\{f(t)\} = e^{-as} \cdot F(s)$ (Verschiebungssatz)

e) $\mathfrak{L}\{f(t+a)\} = e^{as} \cdot \left(F(s) - \int_0^a f(t)e^{-st}\,dt\right)$ (Verschiebungssatz)
f) $\mathfrak{L}\{e^{-at} \cdot f(t)\} = F(s+a)$ (Dämpfungssatz)
g) $\mathfrak{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathfrak{L}\{f(t)\} \cdot \mathfrak{L}\{g(t)\} = F(s) \cdot G(s)$ (Faltungssatz)
h) $\mathfrak{L}\{f'(t)\} = s \cdot F(s) - f(0)$, $\mathfrak{L}\{f''(t)\} = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$, …
$\mathfrak{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \cdot F(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i} f^{(i)}(0)$ (Ableitungen)
i) $F'(s) = \mathfrak{L}\{-t \cdot f(t)\}$, $F''(s) = \mathfrak{L}\{t^2 \cdot f(t)\}$, … $F^{(n)}(s) = \mathfrak{L}\{(-t)^n \cdot f(t)\}$,
$\mathfrak{L}\{t^n \cdot f(t)\} = (-1)^n \cdot F^{(n)}(s)$ (Ableitungen)
j) $\mathfrak{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s} \cdot F(s)$, $\mathfrak{L}\left\{\int_a^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s} \cdot \left(F(s) - \int_0^a f(\tau)d\tau\right)$ (Integral)
k) $\int_s^\infty F(\sigma)d\sigma = \mathfrak{L}\{\frac{1}{t} \cdot f(t)\}$ (Integral)
l) $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty}(s \cdot F(s))$, $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0}(s \cdot F(s))$ (Grenzwertsätze)

für reelle Zahlen a>0, t≥0, k. Dabei ist die Faltung zweier Funktionen f(t) und g(t) definiert vermöge des Faltungsprodukts f(t)*g(t) = $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$. Zu beachten ist noch die Rücktransformation $\mathfrak{L}^{-1}$ der Laplace-Transformation $\mathfrak{L}$, die sich aus den Rechenregeln und obiger Tabelle ergibt.

II. Die Differenzialgleichung
y‘‘ + 4y’ + 5y = e^{-2t}, y(0) = 0, y‘(0) = 0
lässt sich auf Grundlage der Laplace-Transformation mit $\mathcal{L}$\{y\} = F(s), $\mathcal{L}$\{y‘\} = sF(s) – y(0) = sF(s), $\mathcal{L}$\{y‘‘\} = s^2F(s) – sy(0) – y‘(0) = s^2F(s) (auf Grund der Anfangsbedingungen y(0) = 0, y‘(0) = 0), $\mathcal{L}\{e^{-2t}\} = \frac{1}{s+2}$ (gemäß der Tabelle in I.) umwandeln in die Gleichung:

$s^2F(s) + 4sF(s) + 5F(s) = \frac{1}{s+2}$.

Auflösen nach F(s) ergibt:

$s^2F(s) + 4sF(s) + 5F(s) = \frac{1}{s+2}$	(Ausklammern)
$(s^2+4s+5)F(s) = \frac{1}{s+2}$	$\mid :(s^2+4s+5)$
$F(s) = \frac{1}{(s+2)(s^2+4s+5)}$.	

III. Wegen $s^2+4s+5 > 0$ gilt für die nun folgende Partialbruchzerlegung der Ansatz:

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)(s^2+4s+5)} = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs+C}{s^2+4s+5}$$

mit:

$\frac{1}{(s+2)(s^2+4s+5)} = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs+C}{s^2+4s+5}$	$\mid \cdot(s+2)(s^2+4s+5)$
$1 = A(s^2+4s+5) + (Bs+C)(s+2)$	(Klammern auflösen)
$1 = As^2 + 4As + 5A + Bs^2 + 2Bs + Cs + 2C$	(Sortieren, Ausklammern)
$1 = (A+B)s^2 + (4A+2B+C)s + (5A+2C)$.	

Koeffizientenvergleich ergibt:
A+B = 0
4A+2B+C = 0
5A+2C = 1.

Das lineare Gleichungssystem mit den Variablen A, B, C kann mit dem Gauß-Algorithmus gelöst werden:

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrr} + & 1A & + & 1B & & = & 0 \\ + & 4A & + & 2B & + & 1C = & 0 \\ + & 5A & & & + & 2C = & 1 \end{array}$$

Anfangstableau:

1 1 0 | 0
4 2 1 | 0
5 0 2 | 1

1. Schritt: 1*(*2*) - 4*(*1*) / 1*(*3*) - 5*(*1*) /

1 1 0 | 0
0 -2 1 | 0
0 -5 2 | 1

2. Schritt: -2*(*3*) + 5*(*2*) /

1 1 0 | 0
0 -2 1 | 0
0 0 1 | -2

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrcr} +\ 1A & +\ 1B & & = & 0 \\ & -\ 2B & +\ 1C & = & 0 \\ & & +\ 1C & = & -2 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$C = -2$
$B = -1$
$A = 1$

Somit gilt die Partialbruchzerlegung:

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)(s^2+4s+5)} = \frac{1}{s+2} - \frac{s+2}{s^2+4s+5}.$$

IV. Die Rücktransformation in die die Differenzialgleichung lösende Funktion y = y(t) erfolgt (gemäß der Tabelle in I.) mit:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+2}\} = e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+2}{s^2+4s+5}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+2}{s^2+4s+4+1}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\} = e^{-2t}\cos(t),$$

so dass sich

$$y = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+2}\} - \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+2}{s^2+4s+5}\} = e^{-2t} - e^{-2t}\cos(t) = e^{-2t}(1-\cos(t))$$

als Lösungsfunktion ergibt.

www.michael-buhlmann.de / 11.2021 / Aufgabe 1524