

Mathematikaufgaben

> Differenzialgleichungen

> linear, konstante Koeffizienten

Aufgabe: Bestimme die allgemeine Lösung der linearen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$y'' + y' - 6y = 30.$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = g(x) \quad (*)$$

heißt lineare Differentialgleichung n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und $g(x)$ als Störfunktion. Ist $g(x) = 0$, so ist die Differentialgleichung homogen, ansonsten inhomogen. Die Gleichung

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

heißt charakteristische Gleichung der Differentialgleichung (*) und hat n reelle bzw. komplexe Lösungen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Im Falle reeller Lösungen, die paarweise verschieden sind, ergibt sich die allgemeine Lösung: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$. Die partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Differentialgleichung (*) lässt sich gemäß des Typs der Störfunktion $g(x)$ durch einen speziellen Lösungsansatz bestimmen; d.h. mit ganz rationalem $g(x)$ vom Grad n und falls $\lambda=0$ keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $y_p = A + Bx + \dots + Zx^n$ und lässt sich über die Methode des Koeffizientenvergleichs bestimmen.

II. Die Lösung der homogenen Differentialgleichung $y'' + y' - 6y = 0$ bestimmt sich durch die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3.$$

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet damit:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}.$$

III. Für die Inhomogenität $g(x) = 30$ (ganz rationale Funktion vom Grad 0) ergibt sich als Ansatz:

$$y_p = A.$$

Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung führt wegen $y_p' = 0, y_p'' = 0$ auf:

$$0 + 0 - 6A = 30 \Leftrightarrow A = -5,$$

so dass gilt:

$$y_p = -5.$$

IV. Die Lösung der Differentialgleichung lautet damit:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} - 5.$$