Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> linear, konstante Koeffizienten

Aufgabe: Bestimme die allgemeine Lösung der linearen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$y' + 6y = 3e^{-2x}.$$

1. Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = g(x) \quad (*)$$

heißt lineare Differentialgleichung n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und g(x) als Störfunktion. Ist g(x) = 0, so ist die Differentialgleichung homogen, ansonsten inhomogen. Die Gleichung

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

heißt charakteristische Gleichung der Differentialgleichung (*) und hat n reelle bzw. komplexe Lösungen λ_1, … λ_n. Im Falle reeller Lösungen, die paarweise verschieden sind, ergibt sich die allgemeine Lösung: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + ... + C_n e^{\lambda_n x}$. Die partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Differentialgleichung (*) lässt sich gemäß des Typs der Störfunktion g(x) durch einen speziellen Lösungsansatz bestimmen; d.h. mit exponentiellem $g(x) = ae^{\lambda x}$ und falls λ keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $y_p = Ae^{\lambda x}$ und lässt sich über die Methode des Koeffizientenvergleichs bestimmen.

II. Die Lösung der <u>homogenen Differenzialgleichung</u> y' + 6y = 0 bestimmt sich durch die charakteristische Gleichung:

$\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -6$.

Die Lösung der homogenen Differenzialgleichung lautet damit:

$y = Ce^{-6x}$.

III. Für die <u>Inhomogenität</u> $g(x) = 3e^{-2x}$ (Exponentialfunktion) ergibt sich als Ansatz:

$y_p = Ae^{-2x}$.

Einsetzen in die inhomogene Differenzialgleichung führt wegen $y_p' = -2Ae^{-2x}$ auf:

$-2Ae^{-2x} + 6Ae^{-2x} = 3e^{-2x} \Leftrightarrow (-2A+6A)e^{-2x} = 3e^{-2x} \Leftrightarrow 4Ae^{-2x} = 3e^{-2x} \Leftrightarrow 4A = 3 \Leftrightarrow A = \frac{3}{4}$

so dass gilt:

$y_p = \frac{3}{4}e^{-2x}$.

IV. Die <u>Lösung</u> der Differenzialgleichung lautet damit:

$y = Ce^{-6x} + \frac{3}{4}e^{-2x}$.

2. Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = g(x) \quad (*)$$

heißt lineare Differentialgleichung n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und g(x) als Störfunktion. Ist g(x) = 0, so ist die Differentialgleichung homogen, ansonsten inhomogen. Die Gleichung

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

heißt charakteristische Gleichung der Differentialgleichung (*) und hat n reelle bzw. komplexe Lösungen $\lambda_1, \ldots \lambda_n$. Im Falle reeller Lösungen, die paarweise verschieden sind, ergibt sich die allgemeine Lösung: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}$. Hinsichtlich der Inhomogenität g(x) kann im Fall einer Differenzialgleichung mit linearer charakteristischer Gleichung die Variation der Konstanten mit der homogenen Lösung $y = C_1 e^{\lambda_1 x}$ verwendet werden.

II. Die Lösung der homogenen Differenzialgleichung $y' + 6y = 0$ bestimmt sich durch die charakteristische Gleichung:

$\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -6$.

Die Lösung der homogenen Differenzialgleichung lautet damit:

$y = Ce^{-6x}$.

III. Zur inhomogenen Differenzialgleichung $y' + 6y = 3e^{-2x}$ führen wir eine Variation der Konstanten durch, indem wir in der Lösung der homogenen Differenzialgleichung $y_H(x) = Ce^{-6x}$ die Konstante C zu einer Funktion C(x) machen. Es gilt der Ansatz: $y(x) = C(x)e^{-6x}$ bei: $y'(x) = C'(x)e^{-6x} + C(x)\cdot(-6e^{-6x}) = C'(x)e^{-6x} - 6C(x)e^{-6x}$ gemäß der Produktregel. Die Differenzialgleichung $y' + 6y = 3e^{-2x}$ wird damit zu:

$y' + 6y = 3e^{-2x} \Rightarrow C'(x)e^{-6x} - 6C(x)e^{-6x} + 6C(x)e^{-6x} = C'(x)e^{-6x} = 3e^{-2x}$.

Teilen durch e^{-6x} und anschließende Integration führt auf:

$C'(x)e^{-6x} = 3e^{-2x}$	$\mid :e^{-6x}$
$C'(x) = 3e^{4x}$	(Integration)
$C(x) = \int 3e^{4x}dx$	(Stammfunktion)
$C(x) = \frac{3}{4}e^{4x}$.	

Dann ist: $y_p(x) = C(x)\, e^{-6x} = \frac{3}{4} e^{4x}\cdot e^{-6x} = \frac{3}{4} e^{-2x}$ die partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung. Als Gesamtlösung ergibt sich: $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{-6x} + \frac{3}{4}e^{-2x}$.

www.michael-buhlmann.de / 11.2024 / Aufgabe 2259