

Mathematikaufgaben

> Differenzialgleichungen

> linear, konstante Koeffizienten

Aufgabe: Bestimme die allgemeine Lösung der linearen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$y'' - 3y' + 2y = 1, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

Lösung: I. Innerhalb der (reellen, komplexen) Analysis kommt der sog. Laplace-Transformation insofern eine Rolle zu, dass mit ihrer Hilfe (physikalisch-) mathematische Probleme z.B. bei Differenzialgleichungen gelöst werden können. Durch Zuweisung einer Laplace-Transformierten (Bildfunktion) $F(s)$ zur Originalfunktion (Urbildfunktion) $f(t)$ mittels des Laplace-Transformationsoperators $\mathfrak{L}$ gilt:

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathfrak{L}} F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

für (reelle, komplexe) Parameter s . Die Transformation $\xleftrightarrow{\mathfrak{L}}$ heißt Korrespondenz $\circ \longrightarrow \bullet$, es gilt damit: $f(t) \circ \longrightarrow \bullet F(s)$ oder: $F(s) = \mathfrak{L}\{f(t)\}$ (Transformation) bzw. $f(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$ (Rücktransformation). Die Laplace-Transformation setzt die Existenz des die Bildfunktion $F(s)$ definierenden (Laplace-) Integrals voraus, so dass etwa $F(s) \rightarrow 0$ bei $s \rightarrow \infty$ folgt. Das (uneigentliche) Integral existiert, wenn $f(t)$ stückweise stetig und $|f(t)/e^{st}| \leq K$ mit reellem positiven K gilt.

Allgemein gelten für reelle Zahlen a, b und natürliche Zahlen n die folgenden besonderen Laplace-Transformationen laut Transformationstabelle:

Originalfunktion $f(t), t \geq 0$	Laplace-Transformierte $F(s)$
t^n	$\frac{(n-1)!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$\sin(at+b)$	$\frac{\sin b \cdot s + a \cos b}{s^2 + a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
$\cos(at+b)$	$\frac{\cos b \cdot s + a \sin b}{s^2 + a^2}$
$e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$
$e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$

Es gelten dabei die nachstehenden Rechenregeln für Originalfunktionen $f(t)$ und Laplace-Transformierte $F(s)$:

- a) $\mathcal{L}\{kf(t)\} = k\mathcal{L}\{f(t)\} = k \cdot F(s)$ (konstanter Faktor)
b) $\mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\} = F(s) + G(s)$ (Summenregel)
c) $\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$ (Ähnlichkeitssatz)
d) $\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-as} \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-as} \cdot F(s)$ (Verschiebungssatz)
e) $\mathcal{L}\{f(t+a)\} = e^{as} \cdot \left(F(s) - \int_0^a f(t)e^{-st} dt\right)$ (Verschiebungssatz)
f) $\mathcal{L}\{e^{-at} \cdot f(t)\} = F(s+a)$ (Dämpfungssatz)
g) $\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} = F(s) \cdot G(s)$ (Faltungssatz)
h) $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \cdot F(s) - f(0)$, $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$, ...
 $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \cdot F(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i} f^{(i)}(0)$ (Ableitungen)
i) $F'(s) = \mathcal{L}\{-t \cdot f(t)\}$, $F''(s) = \mathcal{L}\{t^2 \cdot f(t)\}$, ... $F^{(n)}(s) = \mathcal{L}\{(-t)^n \cdot f(t)\}$,
 $\mathcal{L}\{t^n \cdot f(t)\} = (-1)^n \cdot F^{(n)}(s)$ (Ableitungen)
j) $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} \cdot F(s)$, $\mathcal{L}\left\{\int_a^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} \cdot \left(F(s) - \int_0^a f(\tau) d\tau\right)$ (Integral)
k) $\int_s^\infty F(\sigma) d\sigma = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{t} \cdot f(t)\right\}$ (Integral)
l) $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} (s \cdot F(s))$, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot F(s))$ (Grenzwertsätze)

für reelle Zahlen $a > 0$, $t \geq 0$, k . Dabei ist die Faltung zweier Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ definiert vermöge des Faltungsprodukts $f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau$. Zu beachten ist noch die Rücktransformation $\mathcal{L}^{-1}$ der Laplace-Transformation $\mathcal{L}$, die sich aus den Rechenregeln und obiger Tabelle ergibt.

II. Die Differenzialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y = 1, y(0) = 0, y'(0) = 1$$

lässt sich auf Grundlage der Laplace-Transformation mit $\mathcal{L}\{y\} = F(s)$, $\mathcal{L}\{y'\} = sF(s) - y(0) = sF(s)$,
 $\mathcal{L}\{y''\} = s^2F(s) - sy(0) - y'(0) = s^2F(s) - 1$ (auf Grund der Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$),

$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ (gemäß der Tabelle in I.: $1 = e^{0t}$) umwandeln in die Gleichung:

$$s^2F(s) - 1 - 3sF(s) + 2F(s) = \frac{1}{s}.$$

Auflösen nach $F(s)$ ergibt:

$$s^2F(s) - 1 - 3sF(s) + 2F(s) = \frac{1}{s} \quad | +1$$

$$s^2F(s) - 3sF(s) + 2F(s) = \frac{1}{s} + 1 \quad (\text{Ausklammern})$$

$$(s^2 - 3s + 2)F(s) = \frac{s+1}{s} \quad | : (s^2 - 3s + 2)$$

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s^2 - 3s + 2)} = \frac{s+1}{s(s-1)(s-2)},$$

Letzteres wegen: $s^2 - 3s + 2 = (s-1)(s-2)$.

III. Für die nun folgende Partialbruchzerlegung gilt der Ansatz:

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2}$$

mit:

$$\frac{s+1}{s(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2} \quad | \cdot s(s-1)(s-2)$$

$$s+1 = A(s-1)(s-2) + Bs(s-2) + Cs(s-1).$$

Einsetzen bestimmter Werte für s führt auf die Unbekannten A , B , C :

$$\underline{s=0}: 0+1 = A \cdot (-1) \cdot (-2) + 0 + 0 \Leftrightarrow 1 = 2A \Leftrightarrow A = 0,5$$

$$\underline{s=1}: 1+1 = 0 + B \cdot 1 \cdot (-1) + 0 \Leftrightarrow 2 = -B \Leftrightarrow B = -2$$

$$\underline{s=2}: 2+1 = 0 + 0 + C \cdot 2 \cdot 1 \Leftrightarrow 3 = 2C \Leftrightarrow C = 1,5.$$

Somit gilt die Partialbruchzerlegung:

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s-1)(s-2)} = \frac{0,5}{s} - \frac{2}{s-1} + \frac{1,5}{s-2} = \frac{1}{2s} - \frac{2}{s-1} + \frac{3}{2(s-2)}.$$

IV. Die Rücktransformation in die die Differenzialgleichung lösende Funktion $y = y(t)$ erfolgt (gemäß der Tabelle in I.) mit:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s}\right\} = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = \frac{1}{2} e^{0t} = \frac{1}{2},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1}\right\} = 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = 2e^t,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{2(s-2)}\right\} = \frac{3}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = \frac{3}{2} e^{2t},$$

so dass sich

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{2(s-2)}\right\} = \frac{1}{2} - 2e^t + \frac{3}{2} e^{2t}$$

als Lösungsfunktion ergibt.

V. Mit $y = 0,5 - 2e^t + 1,5e^{2t}$ folgen:

$$y' = -2e^t + 3e^{2t},$$

$$y'' = -2e^t + 6e^{2t}$$

und damit die erfolgreich durchgeführte Probe:

$$y'' - 3y' + 2y = (-2e^t + 6e^{2t}) - 3(-2e^t + 3e^{2t}) + 2(0,5 - 2e^t + 1,5e^{2t}) = -2e^t + 6e^{2t} + 6e^t - 9e^{2t} + 1 - 4e^t + 3e^{2t} = 1,$$

$$y(0) = 0,5 - 2 + 1,5 = 0,$$

$$y'(0) = -2 + 3 = 1.$$