Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> Substitution, Trennung der Variablen

Aufgabe: Löse die Differenzialgleichung:

$$y^3 \cdot y''+1=0.$$

Lösung: I. Mit der Substitution u = y‘ folgt:

$$y''=u'=\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dy}\cdot y'=\frac{du}{dy}\cdot u\ ,$$

so dass die Differenzialgleichung $y^3 \cdot y''+1=0$ zu:

$$y^3\cdot\frac{du}{dy}\cdot u+1=0$$

wird.

II. Auf die Differentialgleichung mit u und y lässt sich nun die Trennung der Variablen anwenden; es gilt:

$$y^3\cdot\frac{du}{dy}\cdot u+1=0 \qquad | -1$$

$$y^3\cdot\frac{du}{dy}\cdot u=-1 \qquad | :y^3$$

$$\frac{du}{dy}\cdot u=-\frac{1}{y^3} \qquad | \cdot dy$$

$$u\cdot du=-\frac{1}{y^3}\cdot dy \qquad \text{(Integration, Integrationskonstante } C_1\text{)}$$

$$\int u\cdot du=-\int\frac{1}{y^3}\cdot dy+C_1$$

$$\int u\cdot du=-\int y^{-3}\cdot dy+C_1 \qquad \text{(Stammfunktionen)}$$

$$\frac{1}{2}u^2=-(\frac{1}{-2}y^{-2})+C_1$$

$$\frac{1}{2}u^2=\frac{1}{2y^2}+C_1.$$

III. Rücksubstitution y‘ = u ergibt:

$$\frac{1}{2}y'^2=\frac{1}{2y^2}+C_1$$

und weiter:

$$\frac{1}{2}y'^2 = \frac{1}{2y^2} + C_1 \qquad | \cdot 2$$

$$y'^2 = \frac{1}{y^2} + 2C_1 \qquad | \sqrt{}$$

$$y' = \pm\sqrt{\frac{1}{y^2} + 2C_1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{1}{y^2} + 2C_1} \; .$$

IV. Die Differentialgleichung mit x und y lässt sich ebenfalls mit der Trennung der Variablen lösen, und zwar für den Fall $C_1 \neq 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{1}{y^2} + 2C_1} \qquad | \cdot dx$$

$$dy = \pm\sqrt{\frac{1}{y^2} + 2C_1}\,dx \qquad | : \sqrt{\frac{1}{y^2} + 2C_1}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{y^2} + 2C_1}} = \pm dx \qquad \text{(Termumformungen)}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{\frac{1+2C_1y^2}{y^2}}} = \pm dx$$

$$\frac{dy}{\frac{1}{|y|}\cdot\sqrt{1+2C_1y^2}} = \pm dx$$

$$\frac{|y|\cdot dy}{\sqrt{1+2C_1y^2}} = \pm dx \qquad \text{(Integration mit Substitution: } v = 1+2C_1y^2,\ dv = 4C_1|y|\cdot dy\text{)}$$

$$\int \frac{\frac{1}{4C_1}\cdot dv}{\sqrt{v}} = \pm\int dx + C_2 \qquad \text{(Termumformung im Integranden)}$$

$$\int \frac{dv}{4C_1\sqrt{v}} = \pm\int dx + C_2$$

$$\frac{1}{4C_1}\int v^{-\frac{1}{2}}dv = \pm\int dx + C_2 \qquad \text{(Stammfunktionen)}$$

$$\frac{1}{4C_1}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} = \pm x + C_2$$

$$\frac{1}{2C_1}\sqrt{v} = \pm x + C_2 \qquad \text{(Rücksubstitution: } 1+2C_1y^2 = v\text{)}$$

$$\frac{1}{2C_1}\sqrt{1+2C_1y^2} = \pm x + C_2 \qquad | \cdot 2C_1$$

$$\sqrt{1+2C_1y^2} = \pm 2C_1x + 2C_1C_2$$ (Quadrieren)

$$1+2C_1y^2 = (\pm 2C_1x + 2C_1C_2)^2$$ | -1

$$2C_1y^2 = (\pm 2C_1x + 2C_1C_2)^2 - 1$$ | :($2C_1$)

$$y^2 = \frac{(\pm 2C_1x + 2C_1C_2)^2 - 1}{2C_1}$$ | √

$$y = \pm\sqrt{\frac{(\pm 2C_1x + 2C_1C_2)^2 - 1}{2C_1}}\,.$$

V. Für den Fall <u>$C_1 = 0$</u> erhalten wir aus der Beziehung $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{1}{y^2} + 2C_1}$ und mit <u>Trennung der Variablen</u>:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{1}{y^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{|y|}$$ | ·|y|

$$|y|\frac{dy}{dx} = \pm 1$$ | ·dx

$$|y|dy = \pm dx$$ (Integration)

$$\int |y|dy = \pm\int dx + C_2$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \pm x + C_2$$ | ·2

$$y^2 = \pm 2x + 2C_2$$ | √

$$y = \pm\sqrt{\pm 2x + 2C_2}\,.$$

VI. Damit gelten für die Differenzialgleichung $y^3 \cdot y'' + 1 = 0$ die allgemeinen <u>Lösungen</u>:

$$y = \pm\sqrt{\pm 2x + 2C_2}$$ ($C_1 = 0$)

$$y = \pm\sqrt{\frac{(\pm 2C_1x + 2C_1C_2)^2 - 1}{2C_1}}$$ ($C_1 \neq 0$).

www.michael-buhlmann.de / 11.2025 / Aufgabe 2511