

Mathematikaufgaben

> Differenzialgleichungen

> Lineares Differenzialgleichungssystem

Aufgabe: Gegeben sei das lineare homogene Differenzialgleichungssystem 2. Ordnung:

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1 + 2y_2 \\y_2' &= 3y_1 + 2y_2\end{aligned}\quad (*)$$

der reellwertigen Funktionen y_1, y_2 .

- Bestimme die allgemeinen Lösungen y_1, y_2 des Differenzialgleichungssystems (*).
- Wie lauten die Lösungen des Differenzialgleichungssystems (*), wenn die Anfangswertbedingungen $y_1(0) = 2, y_2(0) = 1$ gelten?
- Das Differenzialgleichungssystem wird nun um einen inhomogenen Anteil erweitert und lautet:

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1 + 2y_2 + 2x - 1 \\y_2' &= 3y_1 + 2y_2\end{aligned}\quad (**).$$

Bestimme nun die Lösungen y_1, y_2 des Differenzialgleichungssystems (**).

1. Lösung: I. Allgemein gilt: Ein lineares homogenes Differenzialgleichungssystem 2. Ordnung mit zwei Funktionen y_1, y_2 und konstanten Koeffizienten ist von der Form

$$\begin{aligned}y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2\end{aligned}$$

also:

$$\vec{y}' = A \vec{y}$$

mit der Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und den Vektoren $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \vec{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$.

Mit der charakteristischen Gleichung der Determinante

$$\det(A - \lambda E) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0$$

und deren Lösungen λ_1, λ_2 hat das homogene Differenzialgleichungssystem die Lösungen:

$$y_1 = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x} \quad (\text{falls } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ reell})$$

$$y_1 = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{\lambda x} \quad (\text{falls } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \text{ reell})$$

$$y_1 = e^{ax} (C_1 \sin(bx) + C_2 \cos(bx)) \quad (\text{falls } \lambda_{1,2} = a \pm ib \text{ konjugiert komplex})$$

sowie:

$$y_2 = \frac{1}{a_{12}} (y_1' - a_{11}y_1).$$

II. a) Das homogene Differenzialgleichungssystem (*) besitzt die Koeffizientenmatrix: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$,

die charakteristische Gleichung ergibt sich aus der Determinante:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 2 \cdot 3 = 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0,$$

so dass

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \quad (\text{pq-Formel: } p=-3, q=-4)$$

$$\lambda_{1,2} = 1,5 \pm \sqrt{1,5^2 + 4} = 1,5 \pm \sqrt{6,25} = 1,5 \pm 2,5$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$$

gilt und damit der Fall verschiedener reeller Lösungen λ_1, λ_2 . Die Funktion y_1 ergibt sich als Lösung aus:

$$y_1 = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{4x}$$

mit beliebigen reellen Zahlen C_1, C_2 (als Integrationskonstanten). Die Funktion y_2 lautet dann auf Grund von $y_1' = -C_1 \cdot e^{-x} + 4C_2 \cdot e^{4x}$

$$y_2 = \frac{1}{2}(y_1' - y_1) = \frac{1}{2}((-C_1 \cdot e^{-x} + 4C_2 \cdot e^{4x}) - (C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{4x})) = \frac{1}{2}(-2C_1 \cdot e^{-x} + 3C_2 e^{4x}) = -C_1 \cdot e^{-x} + \frac{3}{2}C_2 e^{4x}.$$

b) Bei den gegebenen Anfangswertbedingungen $y_1(0) = 2$ und $y_2(0) = 1$ sind noch zusätzlich zu den allgemeinen Lösungen des Differenzialgleichungssystems (*) die Konstanten C_1 und C_2 zu ermitteln. Dies geschieht über ein lineares Gleichungssystem auf Grund von:

$$y_1(0) = C_1 + C_2 = 2, \quad y_2(0) = -C_1 + 1,5C_2 = 1$$

und:

$$C_2 = 2 - C_1 \Rightarrow -C_1 + 1,5(2 - C_1) = -C_1 + 3 - 1,5C_1 = 3 - 2,5C_1 = 1 \Rightarrow -2,5C_1 = -2 \Rightarrow C_1 = 0,8$$

$$C_1 = 0,8 \Rightarrow 0,8 + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 1,2.$$

Wir haben damit:

$$y_1 = 0,8 \cdot e^{-x} + 1,2 \cdot e^{4x}$$

$$y_2 = -0,8 \cdot e^{-x} + 1,8 \cdot e^{4x}$$

als Lösungsfunktionen des Differenzialgleichungssystems mit den vorgegebenen Anfangsbedingungen.

c) Erweitert sich das homogene Differenzialgleichungssystem (*) zu dem inhomogenen Differenzialgleichungssystem (**), so sind zusätzlich zu den Lösungen des homogenen Differenzialgleichungssystems partikuläre Lösungen zu finden. So sei nun:

$$y_1' = y_1 + 2y_2 + 2x - 1$$

$$y_2' = 3y_1 + 2y_2$$

mit dem inhomogenen Anteil $g_1(x) = 2x - 1$ (bei $g_2(x) = 0$). Es gilt dann der Ansatz für Polynome, wonach als partikuläre Lösungen Lösungen vom Typ $y_{1p} = ax + b, y_{2p} = cx + d$ zu finden sind. Damit gilt wegen $y_{1p}' = a, y_{2p}' = c$ und durch Einsetzen in die Gleichungen des Differenzialgleichungssystems:

$$a = (ax + b) + 2(cx + d) + 2x - 1 \Rightarrow ax + 2cx - a + b + 2d = -2x + 1 \Rightarrow (a + 2c)x + (-a + b + 2d) = -2x + 1$$

$$c = 3(ax + b) + 2(cx + d) \Rightarrow 3ax + 2cx + 3b - c + 2d = 0 \Rightarrow (3a + 2c)x + (3b - c + 2d) = 0$$

Koeffizientenvergleich ergibt zunächst:

$$a + 2c = -2; -a + b + 2d = 1; 3a + 2c = 0; 3b - c + 2d = 0.$$

Das lineare Gleichungssystem der Gleichungen $a + 2c = -2$ und $3a + 2c = 0$ führt nach Gleichungssubtraktion auf: $-2a = -2 \Rightarrow a = 1$, so dass sich ergibt: $1 + 2c = -2 \Rightarrow 2c = -3 \Rightarrow c = -1,5$. Das Gleichungssystem der Gleichungen $-a + b + 2d = 1$ und $3b - c + 2d = 0$ führt nach Einsetzen von $a = 1$ und $c = -1,5$ auf:

$$-1 + b + 2d = 1 \Rightarrow b + 2d = 2; 3b + 1,5 + 2d = 0 \Rightarrow 3b + 2d = -1,5$$

und damit nach Gleichungssubtraktion auf: $-2b = 3,5 \Rightarrow b = -1,75$, so dass folgt: $-1,75 + 2d = 2 \Rightarrow 2d = 3,75 \Rightarrow d = 1,875$. Als partikuläre Lösungen erhalten wir damit:

$$y_{1p} = x - 1,75$$

$$y_{2p} = -1,5x + 1,875.$$

Die Gesamtlösung des inhomogenen Differenzialgleichungssystems (**) lautet also:

$$y_1 = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{4x} + x - 1,75$$

$$y_2 = -C_1 \cdot e^{-x} + \frac{3}{2}C_2 e^{4x} - 1,5x + 1,875.$$

2. Lösung: I. Allgemein gilt: Ein lineares inhomogenes Differenzialgleichungssystem 2. Ordnung mit zwei Funktionen y_1, y_2 und konstanten Koeffizienten ist von der Form

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + g_1(x) \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + g_2(x) \end{aligned}$$

also:

$$\vec{y}' = A \vec{y} + \vec{g}$$

mit Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und Vektoren $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\vec{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$, $\vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$.

Eliminierung der Funktion y_2 im Differenzialgleichungssystem ergibt die nur noch von y_1 abhängige inhomogene lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$y_1'' + ay_1' + by_1 = g^*(x)$$

mit: $a = -a_{11} - a_{22}$, $b = \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, $g^*(x) = g_1'(x) - (a_{22}g_1(x) - a_{12}g_2(x))$. Die homogene Differenzialgleichung $y_1'' + ay_1' + by_1 = 0$ ist dann lösbar über die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

und deren Lösungen λ_1, λ_2 , so dass y_1 die Form hat:

$$y_1 = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x} + y_{1p} \quad (\text{falls } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ reell})$$

$$y_1 = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{\lambda x} + y_{1p} \quad (\text{falls } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \text{ reell})$$

$$y_1 = e^{ax} (C_1 \sin(bx) + C_2 \cos(bx)) + y_{1p} \quad (\text{falls } \lambda_{1,2} = a \pm ib \text{ konjugiert komplex})$$

mit der partikulären Lösung y_{1p} der inhomogenen Differenzialgleichung. Für die zweite Funktion y_2 des Differenzialgleichungssystems gilt:

$$y_2 = \frac{1}{a_{12}} (y_1' - a_{11}y_1 - g_1(x)).$$

II. a) Zum linearen Differenzialgleichungssystem (*) lautet die Koeffizientenmatrix: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$,

Eliminierung der Funktion y_2 führt mit: $a = -1 - 2 = -3$ und $b = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = -4$ zur (ebenso homogenen) Differenzialgleichung:

$$y_1'' - 3y_1' - 4y_1 = 0.$$

Die zur Differenzialgleichung gehörende charakteristische Gleichung lautet:

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

so dass

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \quad (\text{pq-Formel: } p=-3, q=-4)$$

$$\lambda_{1,2} = 1,5 \pm \sqrt{1,5^2 + 4} = 1,5 \pm \sqrt{6,25} = 1,5 \pm 2,5$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$$

gilt und damit der Fall verschiedener reeller Lösungen λ_1, λ_2 . Die Funktion y_1 ergibt sich als Lösung aus:

$$y_1 = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{4x}$$

mit beliebigen reellen Zahlen C_1, C_2 (als Integrationskonstanten). Die Funktion y_2 lautet dann auf Grund von $y_1' = -C_1 \cdot e^{-x} + 4C_2 \cdot e^{4x}$:

$$y_2 = \frac{1}{2}(y_1' - y_1) = \frac{1}{2}((-C_1 \cdot e^{-x} + 4C_2 \cdot e^{4x}) - (C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{4x})) = \frac{1}{2}(-2C_1 \cdot e^{-x} + 3C_2 e^{4x}) = -C_1 \cdot e^{-x} + \frac{3}{2}C_2 e^{4x}.$$

b) Bei den gegebenen Anfangswertbedingungen $y_1(0) = 2$ und $y_2(0) = 1$ sind noch zusätzlich zu den allgemeinen Lösungen des Differenzialgleichungssystems (*) die Konstanten C_1 und C_2 zu ermitteln. Dies geschieht über ein lineares Gleichungssystem auf Grund von:

$$y_1(0) = C_1 + C_2 = 2, \quad y_2(0) = -C_1 + 1,5C_2 = 1$$

und:

$$C_2 = 2 - C_1 \Rightarrow -C_1 + 1,5(2 - C_1) = -C_1 + 3 - 1,5C_1 = 3 - 2,5C_1 = 1 \Rightarrow -2,5C_1 = -2 \Rightarrow C_1 = 0,8$$

$$C_1 = 0,8 \Rightarrow 0,8 + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 1,2.$$

Wir haben damit:

$$y_1 = 0,8 \cdot e^{-x} + 1,2 \cdot e^{4x}$$

$$y_2 = -0,8 \cdot e^{-x} + 1,8 \cdot e^{4x}$$

als Lösungsfunktionen des Differenzialgleichungssystems mit den vorgegebenen Anfangsbedingungen.

c) Erweitert sich das homogene Differenzialgleichungssystem (*) zu dem inhomogenen Differenzialgleichungssystem (**), so sind zusätzlich zu den Lösungen des homogenen Differenzialgleichungssystems partikuläre Lösungen zu finden. So sei nun:

$$y_1' = y_1 + 2y_2 + 2x - 1$$

$$y_2' = 3y_1 + 2y_2$$

mit dem inhomogenen Anteil $g_1(x) = 2x - 1$ (bei $g_2(x) = 0$). Es gilt dann der Ansatz für Polynome, wonach als partikuläre Lösungen Lösungen vom Typ $y_{1p} = ax + b$, $y_{2p} = cx + d$ zu finden sind. Damit gilt wegen $y_{1p}' = a$, $y_{2p}' = c$ und durch Einsetzen in die Gleichungen des Differenzialgleichungssystems:

$$a = (ax + b) + 2(cx + d) + 2x - 1 \Rightarrow ax + 2cx - a + b + 2d = -2x + 1 \Rightarrow (a + 2c)x + (-a + b + 2d) = -2x + 1$$

$$c = 3(ax + b) + 2(cx + d) \Rightarrow 3ax + 2cx + 3b - c + 2d = 0 \Rightarrow (3a + 2c)x + (3b - c + 2d) = 0$$

Koeffizientenvergleich ergibt zunächst:

$$a + 2c = -2; \quad -a + b + 2d = 1; \quad 3a + 2c = 0; \quad 3b - c + 2d = 0.$$

Das lineare Gleichungssystem der Gleichungen $a + 2c = -2$ und $3a + 2c = 0$ führt nach Gleichungsubtraktion auf: $-2a = -2 \Rightarrow a = 1$, so dass sich ergibt: $1 + 2c = -2 \Rightarrow 2c = -3 \Rightarrow c = -1,5$. Das Gleichungssystem der Gleichungen $-a + b + 2d = 1$ und $3b - c + 2d = 0$ führt nach Einsetzen von $a = 1$ und $c = -1,5$ auf:

$$-1 + b + 2d = 1 \Rightarrow b + 2d = 2; \quad 3b + 1,5 + 2d = 0 \Rightarrow 3b + 2d = -1,5$$

und damit nach Gleichungsubtraktion auf: $-2b = 3,5 \Rightarrow b = -1,75$, so dass folgt: $-1,75 + 2d = 2 \Rightarrow 2d = 3,75 \Rightarrow d = 1,875$. Als partikuläre Lösungen erhalten wir damit:

$$y_{1p} = x - 1,75$$

$$y_{2p} = -1,5x + 1,875.$$

Die Gesamtlösung des inhomogenen Differenzialgleichungssystems (**) lautet also:

$$y_1 = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{4x} + x - 1,75$$

$$y_2 = -C_1 \cdot e^{-x} + \frac{3}{2}C_2 e^{4x} - 1,5x + 1,875.$$