Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> Lineares Differenzialgleichungssystem

Aufgabe: a) Bestimme die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung (*):

$$y''-6y'+5y=-13\sin x \quad (*)$$

b) Bestimme die allgemeinen Lösungen y_1, y_2 des Differenzialgleichungssystems (**).

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1+3y_2 \\ y_2' &= y_1+2y_2-\frac{13}{3}\sin x \end{aligned} \quad (**).$$

Lösung: a) I. Allgemein gilt: Eine Differenzialgleichung der Form

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=g(x) \quad (***)$$

heißt <u>lineare Differenzialgleichung</u> n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und g(x) als Störfunktion. Ist g(x) = 0, so ist die Differentialgleichung homogen, ansonsten inhomogen. Die Gleichung

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+...+a_{n-1}\lambda+a_n=0$$

heißt charakteristische Gleichung der Differenzialgleichung (***) und hat n reelle bzw. komplexe Lösungen λ_1, … λ_n. Im Falle reeller Lösungen, die paarweise verschieden sind, ergibt sich die allgemeine Lösung: $y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}+...+C_ne^{\lambda_nx}$. Die partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Differenzialgleichung (***) lässt sich gemäß des Typs der Störfunktion g(x) durch einen speziellen Lösungsansatz bestimmen; d.h. mit ganz rationalem g(x) vom Grad n und falls λ=0 keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $y_p = A + Bx + … + Zx^n$ und lässt sich über die Methode des Koeffizientenvergleichs bestimmen.

II. Wir errechnen die Lösungen der <u>charakteristischen Gleichung</u> der Differenzialgleichung (*):

$\lambda^2-6\lambda+5=0$ (pq-Formel: p=-6, q=5)

$\lambda=3\pm\sqrt{3^2-5}=3\pm\sqrt{4}=3\pm2$

$\lambda=1,\ \lambda=5$.

Die errechneten λ sind verschieden, die <u>allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung</u>:

$y''-6y'+5y=0$

lautet:

$y_h=C_1e^{1x}+C_2e^{5x}=C_1e^x+C_2e^{5x}$

(mit beliebigen reellen Zahlen C_1, C_2 als Integrationskonstanten).

III. Betrachten wir die inhomogene Differenzialgleichung (*) und suchen nach einer <u>partikulären Lösung</u>, so ist $y = y_P$ als:

$y=a\sin x+b\cos x$

mit:

$y'=a\cos x-b\sin x$, $y''=-a\sin x-b\cos x$

anzusetzen. Einsetzen in die Differenzialgleichung (*) ergibt:

$y''-6y'+5y=-13\sin x$ (Einsetzen)

$(-a\sin x - b\cos x) - 6(a\cos x - b\sin x) + 5(a\sin x + b\cos x) = -13\sin x$
$-a\sin x - b\cos x - 6a\cos x + 6b\sin x + 5a\sin x + 5b\cos x = -13\sin x$
$4a\sin x + 6b\sin x - 6a\cos x + 4b\cos x = -13\sin x$
$(4a + 6b)\sin x + (-6a + 4b)\cos x = -13\sin x$

Koeffizientenvergleich ergibt nun das lineare Gleichungssystem in a und b:

4a + 6b = -13
-6a + 4b = 0.

Die zweite Gleichung des Gleichungssystems lösen wir nach b auf:

-6a + 4b = 0 => 4b = 6a => b = 1,5a,

so dass mit Einsetzen in die erste Gleichung folgt:

4a + 6b = -13 => 4a + 6·1,5a = -13 => 4a + 9a = -13 => 13a = -13 => a = -1.

Mit a = -1 erhalten wir: b = 1,5·(-1) = -1,5. Die partikuläre Lösung lautet somit:

$y_p = -\sin x - 1{,}5\cos x$.

Eine Probe mit $y_p = -\sin x - 1{,}5\cos x$, $y'_P = -\cos x + 1{,}5\sin x$, $y''_P = \sin x + 1{,}5\cos x$ bestätigt die Richtigkeit des Ergebnisses, da:

$y''_p - 6y_p + 5y_p =$

$(\sin x + 1{,}5\cos x) - 6(-\cos x + 1{,}5\sin x) + 5(-\sin x - 1{,}5\cos x) =$

$\sin x + 1{,}5\cos x + 6\cos x - 9\sin x - 5\sin x - 7{,}5\cos x =$

$\sin x - 9\sin x - 5\sin x + 1{,}5\cos x + 6\cos x - 7{,}5\cos x = -13\sin x$

gilt.

III. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung (*) lautet wegen $y = y_h + y_p$:

$y = C_1 e^x + C_2 e^{5x} - \sin x - 1{,}5\cos x$.

b) I. Allgemein gilt: Ein linearesinhomogenes Differenzialgleichungssystem 2. Ordnung mit zwei Funktionen y_1, y_2 und konstanten Koeffizienten ist von der Form

$$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + g_1(x)$$
$$y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + g_2(x)\text{,}$$

also:

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{g}$$

mit Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und Vektoren $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\vec{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$, $\vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$.

Eliminierung der Funktion y_2 im Differenzialgleichungssystem ergibt die nur noch von y_1 abhängige inhomogene lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$y_1'' + ay_1' + by_1 = g^*(x)$$

mit: $a = -a_{11} - a_{22}$, $b = \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, $g^*(x) = g_1'(x) - (a_{22}g_1(x) - a_{12}g_2(x))$. Die homogene Differenzialgleichung $y_1'' + ay_1' + by_1 = 0$ ist dann lösbar über die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

und deren Lösungen λ_1, λ_2, so dass y_1 die Form hat:

$$y_1 = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x} + y_{1p} \quad \text{(falls } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ reell)}$$

$$y_1 = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{\lambda x} + y_{1p} \quad \text{(falls } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \text{ reell)}$$

$$y_1 = e^{ax}\left(C_1 \sin(bx) + C_2 \cos(bx)\right) + y_{1p} \quad \text{(falls } \lambda_{1,2} = a \pm ib \text{ konjugiert komplex)}$$

mit der partikulären Lösung y_{1p} der inhomogenen Differenzialgleichung. Für die zweite Funktion y_2 des Differenzialgleichungssystems gilt:

$$y_2 = \frac{1}{a_{12}}\left(y_1' - a_{11}y_1 - g_1(x)\right).$$

II. Zum linearen Differenzialgleichungssystem (**) lautet die Koeffizientenmatrix: $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, Elimininierung der Funktion y_2 führt mit: a = -4–2 = -6 und b = 4·2–1·3 = 5 sowie mit:

$$g^*(x) = 0 - (0 - 3\cdot(-\frac{13}{3}\sin x)) = -13\sin x$$

zur Differenzialgleichung (*):

$$y''_1 - 6y'_1 + 5y_1 = -13\sin x\,.$$

Laut Aufgabe a) ist aber die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung (*):

$$y_1 = C_1e^x + C_2e^{5x} - \sin x - 1{,}5\cos x\,.$$

Die Funktion y_2 lautet dann auf Grund von $y_1' = C_1e^x + 5C_2e^{5x} - \cos x + 1{,}5\sin x$:

$$y_2 = \frac{1}{3}(y_1' - 4y_1) = \frac{1}{3}\left(\left(C_1e^x + 5C_2e^{5x} - \cos x + 1{,}5\sin x\right) - 4\left(C_1e^x + C_2e^{5x} - \sin x - 1{,}5\cos x\right)\right) =$$

$$\frac{1}{3}\left(-3C_1e^x + C_2e^{5x} + 5{,}5\sin x + 5\cos x\right) = -C_1e^x + \frac{1}{3}C_2e^{5x} + \frac{11}{6}\sin x + \frac{5}{3}\cos x$$

III. Die <u>allgemeinen Lösungen</u> y_1, y_2 des Differenzialgleichungssystems (**) lauten also:

$$y_1 = C_1e^x + C_2e^{5x} - \sin x - 1{,}5\cos x$$

$$y_2 = -C_1e^x + \frac{1}{3}C_2e^{5x} + \frac{11}{6}\sin x + \frac{5}{3}\cos x\,.$$

Mit $y'_1 = C_1e^x + 5C_2e^{5x} - \cos x + 1{,}5\sin x$, $y'_2 = -C_1e^x + \frac{5}{3}C_2e^{5x} + \frac{11}{6}\cos x - \frac{5}{3}\sin x$ führen wir noch die <u>Probe</u> durch und erhalten in der Tat:

1. Gleichung des Differenzialgleichungssystems $y_1' = 4y_1 + 3y_2$:

$$4y_1 + 3y_2 = 4\left(C_1e^x + C_2e^{5x} - \sin x - 1{,}5\cos x\right) + 3\left(-C_1e^x + \frac{1}{3}C_2e^{5x} + \frac{11}{6}\sin x + \frac{5}{3}\cos x\right) =$$

$$4C_1e^x + 4C_2e^{5x} - 4\sin x - 6\cos x - 3C_1e^x + C_2e^{5x} + \frac{11}{2}\sin x + 5\cos x =$$

$$C_1e^x + 5C_2e^{5x} + 1{,}5\sin x - \cos x = y'_1$$

2. Gleichung des Differenzialgleichungssystems $y_2' = y_1 + 2y_2 - \frac{13}{3}\sin x$:

$$y_1 + 2y_2 - \frac{13}{3}\sin x =$$

$$C_1e^x + C_2e^{5x} - \sin x - 1{,}5\cos x + 2\left(-C_1e^x + \frac{1}{3}C_2e^{5x} + \frac{11}{6}\sin x + \frac{5}{3}\cos x\right) - \frac{13}{3}\sin x =$$

$$C_1e^x + C_2e^{5x} - \sin x - 1{,}5\cos x - 2C_1e^x - \frac{2}{3}C_2e^{5x} + \frac{11}{3}\sin x + \frac{10}{3}\cos x - \frac{13}{3}\sin x =$$

$$-C_1e^x + \frac{1}{3}C_2e^{5x} - \sin x - 1{,}5\cos x + \frac{10}{3}\cos x - \frac{2}{3}\sin x =$$

$$-C_1e^x + \frac{5}{3}C_2e^{5x} + \frac{11}{6}\cos x - \frac{5}{3}\sin x = y'_2$$