

Mathematikaufgaben

> Differenzialgleichungen

> Lineares Differenzialgleichungssystem

Aufgabe: a) Bestimme die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung (*):

$$y'' - 6y' + 5y = -13 \sin x \quad (*)$$

b) Bestimme die allgemeinen Lösungen y_1, y_2 des Differenzialgleichungssystems (**).

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 + 3y_2 \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 - \frac{13}{3} \sin x \quad (**). \end{aligned}$$

Lösung: a) I. Allgemein gilt: Eine Differenzialgleichung der Form

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = g(x) \quad (***)$$

heißt lineare Differenzialgleichung n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und $g(x)$ als Störfunktion. Ist $g(x) = 0$, so ist die Differenzialgleichung homogen, ansonsten inhomogen. Die Gleichung

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

heißt charakteristische Gleichung der Differenzialgleichung (***) und hat n reelle bzw. komplexe Lösungen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Im Falle reeller Lösungen, die paarweise verschieden sind, ergibt sich die allgemeine Lösung: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$. Die partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Differenzialgleichung (***) lässt sich gemäß des Typs der Störfunktion $g(x)$ durch einen speziellen Lösungsansatz bestimmen; d.h. mit ganz rationalem $g(x)$ vom Grad n und falls $\lambda=0$ keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $y_p = A + Bx + \dots + Zx^n$ und lässt sich über die Methode des Koeffizientenvergleichs bestimmen.

II. Wir errechnen die Lösungen der charakteristischen Gleichung der Differenzialgleichung (*):

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \quad (\text{pq-Formel: } p=-6, q=5)$$

$$\lambda = 3 \pm \sqrt{3^2 - 5} = 3 \pm \sqrt{4} = 3 \pm 2$$

$$\lambda = 1, \lambda = 5.$$

Die errechneten λ sind verschieden, die allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung:

$$y'' - 6y' + 5y = 0$$

lautet:

$$y_h = C_1 e^{1x} + C_2 e^{5x} = C_1 e^x + C_2 e^{5x}$$

(mit beliebigen reellen Zahlen C_1, C_2 als Integrationskonstanten).

III. Betrachten wir die inhomogene Differenzialgleichung (*) und suchen nach einer partikulären Lösung, so ist $y = y_p$ als:

$$y = a \sin x + b \cos x$$

mit:

$$y' = a \cos x - b \sin x, \quad y'' = -a \sin x - b \cos x$$

anzusetzen. Einsetzen in die Differenzialgleichung (*) ergibt:

$$y'' - 6y' + 5y = -13 \sin x \quad (\text{Einsetzen})$$

$$\begin{aligned}
(-a \sin x - b \cos x) - 6(a \cos x - b \sin x) + 5(a \sin x + b \cos x) &= -13 \sin x \\
-a \sin x - b \cos x - 6a \cos x + 6b \sin x + 5a \sin x + 5b \cos x &= -13 \sin x \\
4a \sin x + 6b \sin x - 6a \cos x + 4b \cos x &= -13 \sin x \\
(4a + 6b) \sin x + (-6a + 4b) \cos x &= -13 \sin x
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt nun das lineare Gleichungssystem in a und b:

$$\begin{aligned}
4a + 6b &= -13 \\
-6a + 4b &= 0.
\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung des Gleichungssystems lösen wir nach b auf:

$$-6a + 4b = 0 \Rightarrow 4b = 6a \Rightarrow b = 1,5a,$$

so dass mit Einsetzen in die erste Gleichung folgt:

$$4a + 6b = -13 \Rightarrow 4a + 6 \cdot 1,5a = -13 \Rightarrow 4a + 9a = -13 \Rightarrow 13a = -13 \Rightarrow a = -1.$$

Mit a = -1 erhalten wir: b = 1,5 · (-1) = -1,5. Die partikuläre Lösung lautet somit:

$$y_p = -\sin x - 1,5 \cos x.$$

Eine Probe mit $y_p = -\sin x - 1,5 \cos x$, $y'_p = -\cos x + 1,5 \sin x$, $y''_p = \sin x + 1,5 \cos x$ bestätigt die Richtigkeit des Ergebnisses, da:

$$\begin{aligned}
y''_p - 6y_p + 5y_p &= \\
(\sin x + 1,5 \cos x) - 6(-\cos x + 1,5 \sin x) + 5(-\sin x - 1,5 \cos x) &= \\
\sin x + 1,5 \cos x + 6 \cos x - 9 \sin x - 5 \sin x - 7,5 \cos x &= \\
\sin x - 9 \sin x - 5 \sin x + 1,5 \cos x + 6 \cos x - 7,5 \cos x &= -13 \sin x
\end{aligned}$$

gilt.

III. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung (*) lautet wegen $y = y_h + y_p$:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{5x} - \sin x - 1,5 \cos x.$$

b) I. Allgemein gilt: Ein lineares inhomogenes Differenzialgleichungssystem 2. Ordnung mit zwei Funktionen y_1, y_2 und konstanten Koeffizienten ist von der Form

$$\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + g_1(x) \\
y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + g_2(x)
\end{aligned}$$

also:

$$\vec{y}' = A \vec{y} + \vec{g}$$

mit Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und Vektoren $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\vec{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$, $\vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$.

Eliminierung der Funktion y_2 im Differenzialgleichungssystem ergibt die nur noch von y_1 abhängige inhomogene lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$y_1'' + ay_1' + by_1 = g^*(x)$$

mit: $a = -a_{11} - a_{22}$, $b = \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, $g^*(x) = g_1'(x) - (a_{22}g_1(x) - a_{12}g_2(x))$. Die homogene Differenzialgleichung $y_1'' + ay_1' + by_1 = 0$ ist dann lösbar über die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

und deren Lösungen λ_1, λ_2 , so dass y_1 die Form hat:

$$y_1 = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x} + y_{1p} \quad (\text{falls } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ reell})$$

$$y_1 = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{\lambda x} + y_{1p} \quad (\text{falls } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \text{ reell})$$

$$y_1 = e^{ax} (C_1 \sin(bx) + C_2 \cos(bx)) + y_{1p} \quad (\text{falls } \lambda_{1,2} = a \pm ib \text{ konjugiert komplex})$$

mit der partikulären Lösung y_{1p} der inhomogenen Differenzialgleichung. Für die zweite Funktion y_2 des Differenzialgleichungssystems gilt:

$$y_2 = \frac{1}{a_{12}}(y_1' - a_{11}y_1 - g_1(x)).$$

II. Zum linearen Differenzialgleichungssystem (**) lautet die Koeffizientenmatrix: $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, Eliminierung der Funktion y_2 führt mit: $a = -4-2 = -6$ und $b = 4 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 5$ sowie mit:

$$g^*(x) = 0 - (0 - 3 \cdot (-\frac{13}{3} \sin x)) = -13 \sin x$$

zur Differenzialgleichung (*):

$$y_1' - 6y_1 + 5y_1 = -13 \sin x.$$

Laut Aufgabe a) ist aber die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung (*):

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{5x} - \sin x - 1,5 \cos x.$$

Die Funktion y_2 lautet dann auf Grund von $y_1' = C_1 e^x + 5C_2 e^{5x} - \cos x + 1,5 \sin x$:

$$y_2 = \frac{1}{3}(y_1' - 4y_1) = \frac{1}{3}((C_1 e^x + 5C_2 e^{5x} - \cos x + 1,5 \sin x) - 4(C_1 e^x + C_2 e^{5x} - \sin x - 1,5 \cos x)) =$$

$$\frac{1}{3}(-3C_1 e^x + C_2 e^{5x} + 5,5 \sin x + 5 \cos x) = -C_1 e^x + \frac{1}{3}C_2 e^{5x} + \frac{11}{6} \sin x + \frac{5}{3} \cos x$$

III. Die allgemeinen Lösungen y_1, y_2 des Differenzialgleichungssystems (**) lauten also:

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{5x} - \sin x - 1,5 \cos x$$

$$y_2 = -C_1 e^x + \frac{1}{3}C_2 e^{5x} + \frac{11}{6} \sin x + \frac{5}{3} \cos x.$$

Mit $y_1' = C_1 e^x + 5C_2 e^{5x} - \cos x + 1,5 \sin x$, $y_2' = -C_1 e^x + \frac{5}{3}C_2 e^{5x} + \frac{11}{6} \cos x - \frac{5}{3} \sin x$ führen wir noch die Probe durch und erhalten in der Tat:

1. Gleichung des Differenzialgleichungssystems $y_1' = 4y_1 + 3y_2$:

$$4y_1 + 3y_2 = 4(C_1 e^x + C_2 e^{5x} - \sin x - 1,5 \cos x) + 3\left(-C_1 e^x + \frac{1}{3}C_2 e^{5x} + \frac{11}{6} \sin x + \frac{5}{3} \cos x\right) =$$

$$4C_1 e^x + 4C_2 e^{5x} - 4 \sin x - 6 \cos x - 3C_1 e^x + C_2 e^{5x} + \frac{11}{2} \sin x + 5 \cos x =$$

$$C_1 e^x + 5C_2 e^{5x} + 1,5 \sin x - \cos x = y_1'$$

2. Gleichung des Differenzialgleichungssystems $y_2' = y_1 + 2y_2 - \frac{13}{3} \sin x$:

$$y_1 + 2y_2 - \frac{13}{3} \sin x =$$

$$C_1 e^x + C_2 e^{5x} - \sin x - 1,5 \cos x + 2\left(-C_1 e^x + \frac{1}{3}C_2 e^{5x} + \frac{11}{6} \sin x + \frac{5}{3} \cos x\right) - \frac{13}{3} \sin x =$$

$$C_1 e^x + C_2 e^{5x} - \sin x - 1,5 \cos x - 2C_1 e^x - \frac{2}{3}C_2 e^{5x} + \frac{11}{3} \sin x + \frac{10}{3} \cos x - \frac{13}{3} \sin x =$$

$$-C_1 e^x + \frac{1}{3}C_2 e^{5x} - \sin x - 1,5 \cos x + \frac{10}{3} \cos x - \frac{2}{3} \sin x =$$

$$-C_1 e^x + \frac{5}{3}C_2 e^{5x} + \frac{11}{6} \cos x - \frac{5}{3} \sin x = y_2'$$