Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> Lineares Differenzialgleichungssystem

Aufgabe: Gegeben sei das lineare homogene Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_3 \\ y_2' &= y_2 + y_3 \quad (*) \\ y_3' &= y_1 + y_2 \end{aligned}$$

der reellwertigen Funktionen y_1, y_2, y_3.

a) Bestimme die allgemeinen Lösungen y_1, y_2 des Differenzialgleichungssystems (*).

b) Wie lauten die Lösungen des Differenzialgleichungssystems (*), wenn die Anfangswertbedingungen $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$, $y_3(0) = 3$ gelten?

Lösung: Allgemein gilt: Ein lineares homogenes Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung mit drei Funktionen y_1, y_2, y_3 und konstanten Koeffizienten ist von der Form

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \ , \\ y_3' &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \end{aligned}$$

also:

$$\vec{y}' = A\vec{y}$$

mit der Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ und den Vektoren $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $\vec{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}$.

Mit der charakteristischen Gleichung der Determinante

$$\det(A-\lambda E) = 0$$

und deren Lösungen λ_1, λ_2, λ_3 als Eigenwerte der Koeffizientenmatrix hat das homogene Differenzialgleichungssystem die Lösungsvarianten für y_1:

$$y_1 = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x} + C_3 \cdot e^{\lambda_3 x} \text{ (falls } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ reell, paarweise verschieden)}$$

$$y_1 = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{\lambda x} \text{ (falls } \lambda_1=\lambda_2=\lambda \neq \lambda_3 \text{ reell)}$$

$$y_1 = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) \cdot e^{\lambda x} \text{ (falls } \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda \text{ reell)}$$

$$y_1 = e^{ax}\left(C_1 \sin(bx) + C_2 \cos(bx)\right) \text{ (falls } \lambda_{1,2} = a \pm ib \text{ konjugiert komplex),}$$

während sich die Lösungen von y_2, y_3 durch Einsetzen von y_1 und y_1' in das Differenzialgleichungssystem und durch Umstellen nach y_2, y_3 ergeben. Im Falle von Anfangswertbedingungen $y_1(0) = a$, $y_2(0) = b$, $y_3(0) = c$ ist ein lineares Gleichungssystem auszurechnen, das die Unbekannten C_1, C_2, C_3 bestimmt.

a) I. Im homogenen Differenzialgleichungssystem (*) mit der Koeffizientenmatrix: A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

errechnen sich die Lösungen der charakteristischen Gleichung:
det(A–λE) = 0
mit:

A – λE = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

als:
det(A–λE) = - λ(1-λ)^2 + 0 – (1-λ) – (1-λ) – 0 = - λ(1-λ)^2 – 2(1-λ) = 0
(Determinantenentwicklung gemäß der Sarrusregel). Die Gleichung lässt sich wie folgt nach λ umstellen:

- λ(1-λ)^2 – 2(1-λ) = 0	(Ausklammern)
(1-λ)[-λ(1-λ) – 2] = 0	(Satz vom Nullprodukt)
1-λ = 0, -λ(1-λ) – 2	| + λ
1 = λ, λ^2 – λ – 2 = 0	(abc-Formel)
λ = 1, λ = -1, λ = 2.	

λ = -1, λ = 1, λ = 2 sind Lösungen der charakteristischen Gleichung und damit Eigenwerte der Matrix A.

II. Die Eigenwerte sind paarweise verschieden. Somit genügt y_1 der Lösung:

$y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{2x}$.

Wir berechnen nun auf Grund von (*) die Lösungen für y_2, y_3 wie folgt:

$y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{2x}$ => $y_1' = -C_1 e^{-x} + C_2 e^x + 2C_3 e^{2x}$

$y_1' = y_1 + y_3$ =>

$y_3 = y_1' - y_1 = (-C_1 e^{-x} + C_2 e^x + 2C_3 e^{2x}) - (C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{2x}) = -2C_1 e^{-x} + C_3 e^{2x}$

$y_3 = -2C_1 e^{-x} + C_3 e^{2x}$ => $y_3' = 2C_1 e^{-x} + 2C_3 e^{2x}$

$y_3' = y_1 + y_2$ =>

$y_2 = y_3' - y_1 = (2C_1 e^{-x} + 2C_3 e^{2x}) - (C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{2x}) = C_1 e^{-x} - C_2 e^x + C_3 e^{2x}$

$y_2 = C_1 e^{-x} - C_2 e^x + C_3 e^{2x}$ => $y_2' = -C_1 e^{-x} - C_2 e^x + 2C_3 e^{2x}$.

Als Lösungen des homogenen Differenzialgleichungssystems haben wir damit:

$y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{2x}$

$y_2 = C_1 e^{-x} - C_2 e^x + C_3 e^{2x}$ (**).

$y_3 = -2C_1 e^{-x} + C_3 e^{2x}$

b) Die Anfangswertbedingungen $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$, $y_3(0) = 3$ setzen wir in die Beziehungen (**) ein und erhalten:

$y_1(0) = C_1 + C_2 + C_3 = 1$

$y_2(0) = C_1 - C_2 + C_3 = 2$,

$y_3(0) = -2C_1 + C_3 = 3$

ein lineares Gleichungssystem, das wir mit dem Gauß-Algorithmus lösen:

Lineares Gleichungssystem:

$+\ 1C_1\ +\ 1C_2\ +\ 1C_3\ =\ 1$
$+\ 1C_1\ -\ 1C_2\ +\ 1C_3\ =\ 2$
$-\ 2C_1\ \qquad +\ 1C_3\ =\ 3$

Anfangstableau:

1 1 1 | 1
1 -1 1 | 2
-2 0 1 | 3

1. Schritt: 1*(*2*) - 1*(*1*) / 1*(*3*) + 2*(*1*) /

1 1 1 | 1
0 -2 0 | 1
0 2 3 | 5

2. Schritt: 2*(*1*) + 1*(*2*) / 1*(*3*) + 1*(*2*) /

2 0 2 | 3
0 -2 0 | 1
0 0 3 | 6

3. Schritt: 3*(*1*) - 2*(*3*) /

6 0 0 | -3
0 -2 0 | 1
0 0 3 | 6

Teilen: (*1*):6 / (*2*):(-2) / (*3*):3 /

1 0 0 | -0.5
0 1 0 | -0.5
0 0 1 | 2

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$+\ 1C_1 = -0.5$
$+\ 1C_2 = -0.5$
$+\ 1C_3 = 2$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$C_1 = -0.5$
$C_2 = -0.5$
$C_3 = 2$

Einsetzen von C_1, C_2, C_3 in (**) führt auf die Lösungen des homogenen Differenzialgleichungssystems unter Anfangswertbedingungen:

$$y_1 = -0{,}5e^{-x} - 0{,}5e^{x} + 2e^{2x}$$
$$y_2 = -0{,}5e^{-x} + 0{,}5e^{x} + 2e^{2x}$$
$$y_3 = e^{-x} + 2e^{2x}.$$

www.michael-buhlmann.de / 05.2021 / Aufgabe 1414