

Mathematikaufgaben

> Differenzialgleichungen

> Trennung der Variablen

Aufgabe: Löse die Differenzialgleichung:

$$y \cdot y' = x, y(1) = 3.$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differenzialgleichung der Form:

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y)$$

ist vermöge der unbestimmten Integrale:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C$$

mit der Integrationskonstante C allgemein lösbar. Die Integrationskonstante bestimmt sich aus der Anfangsbedingung der Differenzialgleichung $y(a) = b$, so dass sich in eindeutiger Weise eine spezielle Lösung für die Funktion $y(x)$ ergibt.

II. Aus $y \cdot y' = x$ folgt zunächst:

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = x.$$

Multiplikation mit dx (Trennung der Variablen) ergibt:

$$y dy = x dx.$$

Integration führt auf:

$$\int y dy = \int x dx + C,$$

d.h.:

$$\frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} x^2 + C,$$

woraus sich nach Multiplikation mit 2 und Wurzelziehen ergibt:

$$y^2 = x^2 + 2C$$

$$y = \pm \sqrt{x^2 + 2C}$$

Wir betrachten wegen der Anfangsbedingung nur den positiven Zweig der Wurzel, also:

$y = \sqrt{x^2 + 2C}$. Die Bestimmung von C aus der Anfangsbedingung $y(1) = 3$ erfolgt mit:

$$y(1) = \sqrt{1^2 + 2C} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{1 + 2C} = 3 \Leftrightarrow 1 + 2C = 9 \Leftrightarrow 2C = 8 \Leftrightarrow C = 4.$$

Die gesuchte Lösung der Differenzialgleichung, die die Anfangsbedingung erfüllt, lautet wegen $C = 4$ also:

$$y = \sqrt{x^2 + 8}.$$