Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> Trennung der Variablen

Aufgabe: Löse die Differenzialgleichung:

$$y' = x^2 y\,.$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differenzialgleichung der Form:

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y)$$

ist vermöge der unbestimmten Integrale:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

mit der Integrationskonstante C allgemein lösbar. Die Integrationskonstante bestimmt sich, falls vorhanden, aus der Anfangsbedingung der Differenzialgleichung y(a) = b, so dass sich in eindeutiger Weise eine spezielle Lösung für die Funktion y(x) ergibt.

II. Wir formen unter Trennung der Variablen wie folgt um:

$y' = x^2 y$	(Ersetzen: $y' = \frac{dy}{dx}$)
$\frac{dy}{dx} = x^2 y$	$\mid \cdot dx$
$dy = x^2 y dx$	$\mid :y$
$\frac{dy}{y} = x^2 dx$	(Variablen getrennt, Integration)
$\int \frac{dy}{y} = \int x^2 dx + C$	(Integralbestimmung)
$\ln\lvert y\rvert = \frac{1}{3}x^3 + C$	$\mid e^{(.)}$
$y = e^{\frac{1}{3}x^3 + C}$	(Anwendung der Potenzgesetze, Integrationskonstante C_1)
$y = C_1 \cdot \sqrt[3]{e^{x^3}}$	

Die gesuchte allgemeine Lösung der Differenzialgleichung ist also:

$y = C_1 \cdot \sqrt[3]{e^{x^3}}$, $C_1 > 0$.

www.michael-buhlmann.de / 06.2015 / Aufgabe 113