

Mathematikaufgaben

> Differenzialgleichungen

> Trennung der Variablen

Aufgabe: Löse die Differenzialgleichung:

$$y' = \frac{e^x}{2y}.$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differenzialgleichung der Form:

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y)$$

ist vermöge der unbestimmten Integrale:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C$$

mit der Integrationskonstante C allgemein lösbar. Die Integrationskonstante bestimmt sich, falls vorhanden, aus der Anfangsbedingung der Differenzialgleichung $y(a) = b$, so dass sich in eindeutiger Weise eine spezielle Lösung für die Funktion $y(x)$ ergibt.

II. Wir formen unter Trennung der Variablen wie folgt um:

$$y' = \frac{e^x}{2y} \quad (\text{Ersetzen: } y' = \frac{dy}{dx})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{2y} \quad | \cdot dx$$

$$dy = \frac{e^x}{2y} dx \quad | \cdot 2y$$

$$2y dy = e^x dx \quad (\text{Variablen getrennt, Integration})$$

$$\int 2y dy = \int e^x dx + C \quad (\text{Integralbestimmung})$$

$$y^2 = e^x + C \quad | \sqrt{\quad}$$

$$y = \pm \sqrt{e^x + C}$$

Die gesuchte allgemeine Lösung der Differenzialgleichung ist also:

$$y = \pm \sqrt{e^x + C}.$$