Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> Trennung der Variablen

Aufgabe: Löse die Differenzialgleichung:

$$xyy' = (y^2+4)(x-4).$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differenzialgleichung der Form:

$$y'(x) = f(x)\cdot g(y)$$

ist vermöge der unbestimmten Integrale:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

mit der Integrationskonstante C allgemein lösbar. Die Integrationskonstante bestimmt sich, falls vorhanden, aus der Anfangsbedingung der Differenzialgleichung y(a) = b, so dass sich in eindeutiger Weise eine spezielle Lösung für die Funktion y(x) ergibt.

II. Wir formen unter Trennung der Variablen wie folgt um:

$xyy' = (y^2+4)(x-4)$	(Ersetzen: $y' = \frac{dy}{dx}$)
$xy\cdot\frac{dy}{dx} = (y^2+4)(x-4)$	$\mid \cdot dx$
$xydy = (y^2+4)(x-4)dx$	$\mid :x$
$ydy = (y^2+4)\cdot\frac{x-4}{x}dx$	$\mid :(y^2+4)$
$\frac{y}{y^2+4}dy = \frac{x-4}{x}dx$	(Variablen getrennt, Integration)
$\int\frac{y}{y^2+4}dy = \int\frac{x-4}{x}dx + C$	(*) (Integralbestimmung)
$\frac{1}{2}\ln(y^2+4) = x - 4\ln\lvert x\rvert + C$	$\mid \cdot 2$
$\ln(y^2+4) = 2x - 8\ln\lvert x\rvert + 2C$	$\mid e^{()}$
$y^2+4 = e^{2x-8\ln\lvert x\rvert+2C}$	$\mid -4$
$y^2 = e^{2x-8\ln\lvert x\rvert+2C} - 4$	$\mid \sqrt{}$
$y = \pm\sqrt{e^{2x-8\ln\lvert x\rvert+2C} - 4}$	

Zur Bestimmung der Integrale in (*) ist noch zu sagen: Das Integral $\int\frac{y}{y^2+4}dy$ ist mit Substitution $z = y^2+4$, $dz = 2ydy$ zu lösen, so dass

$$\int\frac{y}{y^2+4}dy = \frac{1}{2}\int\frac{1}{z}dz = \frac{1}{2}\ln\lvert z\rvert = \frac{1}{2}\ln(y^2+4)$$

gilt. Für das Integral $\int\frac{x-4}{x}dx$ berechnen wir:

$$\int \frac{x-4}{x}\,dx = \int\left(\frac{x}{x}-\frac{4}{x}\right)dx = \int\left(1-\frac{4}{x}\right)dx = x-4\ln|x|.$$

Die gesuchte allgemeine Lösung der Differenzialgleichung ist damit:

$$y = \pm\sqrt{e^{2x-8\ln|x|+2C}-4}.$$

www.michael-buhlmann.de / 06.2015 / Aufgabe 125