Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> Substitution, Trennung der Variablen

Aufgabe: Löse die Differenzialgleichung:

$$y' = x^3(5x-y)^2 + 5\,.$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differenzialgleichung der Form:

$$y'(x) = f(x)\cdot g(y)$$

ist vermöge der unbestimmten Integrale:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

mit der Integrationskonstante C allgemein lösbar. Die Integrationskonstante bestimmt sich, falls vorhanden, aus der Anfangsbedingung der Differenzialgleichung y(a) = b, so dass sich in eindeutiger Weise eine spezielle Lösung für die Funktion y(x) ergibt.

Der Trennung der Variablen kann unter Umständen eine Substitution voraufgehen, etwa mit: z = z(x) = φ(x,y) und z‘ = dz/dx = ψ(x,y‘) als Teile der Differenzialgleichung.

II. Wir substituieren in der Differenzialgleichung:

$y' = x^3(5x-y)^2 + 5$ (*)

zunächst mit: 5x – y = z und z‘ = dz/dx = 5 – y‘ ⇔ y‘ = 5 – z‘, so dass durch diese Vereinfachung die Differenzialgleichung (*) zu:

$5 - z' = x^3z^2 + 5$ | -5

$-z' = x^3z^2$ (**)

wird. Die Differenzialgleichung (**) formen wir unter Trennung der Variablen wie folgt um:

$-z' = x^3z^2$ (Ersetzen: $z' = \frac{dz}{dx}$)

$-\frac{dz}{dx} = x^3z^2$ | ·dx

$-dz = x^3z^2dx$ | :z²

$-\frac{dz}{z^2} = x^3dx$ (Variablen getrennt, Integration mit Integrationskonstante C)

$-\int\frac{dz}{z^2} = \int x^3dx + C$ (Berechnung der Integrale)

$-\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}x^4 + C$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{4}x^4 + C$ (Kehrwertbildung)

$z = \frac{1}{\frac{1}{4}x^4 + C}$ (Erweitern des Bruchs mit 4)

$z = \frac{4}{x^4 + 4C}$ (***).

Rücksubstitution auf Grund von z = 5x – y ergibt in (***):

$$5x - y = \frac{4}{x^4 + 4C} \qquad | -5x$$

$$-y = \frac{4}{x^4 + 4C} - 5x \qquad | \cdot(-1)$$

$$y = 5x - \frac{4}{x^4 + 4C}$$

und damit die Lösung der Differenzialgleichung.

www.michael-buhlmann.de / 02.2017 / Aufgabe 311