Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> Trennung der Variablen

Aufgabe: Löse die Differenzialgleichung mit Anfangsbedingung:

$$yy' = 1 + \sin x\,,\ \ y(1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differenzialgleichung der Form:

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y)$$

ist bei <u>Trennung der Variablen</u> vermöge der unbestimmten Integrale:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

mit der Integrationskonstante C allgemein lösbar. Die Integrationskonstante bestimmt sich, falls vorhanden, aus der Anfangsbedingung der Differenzialgleichung y(a) = b, so dass sich in eindeutiger Weise eine spezielle Lösung für die Funktion y(x) ergibt.

II. Wir formen unter Trennung der Variablen wie folgt um:

$yy' = 1 + \sin x$	(Ersetzen: $y' = \frac{dy}{dx}$)
$y \cdot \frac{dy}{dx} = 1 + \sin x$	| ·dx
$ydy = (1 + \sin x)dx$	(Variablen getrennt, Integration)
$\int ydy = \int (1 + \sin x)dx$	(Integralbestimmung)
$\frac{1}{2}y^2 = x - \cos x + C_1$	| ·2
$y^2 = 2x - 2\cos x + 2C_1$	($C = 2C_1$)
$y^2 = 2x - 2\cos x + C$	| √
$y = \sqrt{2x - 2\cos x + C}$	

III. Die Bestimmung von C aus der <u>Anfangsbedingung</u> $y(1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ erfolgt mit:

$$y(1) = \sqrt{2 \cdot 1 - 2\cos 0 + C} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{C} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{4}.$$

Die gesuchte Lösung der Differenzialgleichung, die die Anfangsbedingung erfüllt, lautet:

$$y = \sqrt{2x - 2\cos x + \frac{\pi}{4}}.$$

www.michael-buhlmann.de / 05.2021 / Aufgabe 1386