Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> Trennung der Variablen

Aufgabe: Löse die Differenzialgleichung mit Anfangsbedingung:

$$yy' = x^2, \; y(3) = 2.$$

1. Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differenzialgleichung der Form:

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y)$$

ist bei Trennung der Variablen vermöge der unbestimmten Integrale:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

mit der Integrationskonstante C allgemein lösbar. Die Integrationskonstante bestimmt sich, falls vorhanden, aus der Anfangsbedingung der Differenzialgleichung y(a) = b, so dass sich in eindeutiger Weise eine spezielle Lösung für die Funktion y(x) ergibt.

II. Wir formen unter Trennung der Variablen wie folgt um:

$yy' = x^2$	(Ersetzen: $y' = \frac{dy}{dx}$)
$y \cdot \frac{dy}{dx} = x^2$	| ·dx
$ydy = x^2dx$	(Variablen getrennt, Integration)
$\int ydy = \int x^2dx$	(Integralbestimmung)
$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{3}x^3 + C_1$	| ·2
$y^2 = \frac{2}{3}x^3 + 2C_1$	(C = $2C_1$)
$y^2 = \frac{2}{3}x^3 + C$	| √
$y = \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + C}$	

III. Die Bestimmung von C aus der Anfangsbedingung $y(3) = 2$ erfolgt mit:

$$y(3) = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot 3^3 + C} = \sqrt{18 + C} = 2 \Leftrightarrow 18 + C = 4 \Leftrightarrow C = -14.$$

Die gesuchte Lösung der Differenzialgleichung, die die Anfangsbedingung erfüllt, lautet:

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}x^3 - 14}.$$

2. Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differenzialgleichung der Form:

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y)$$

ist bei Trennung der Variablen vermöge der unbestimmten Integrale:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

mit der Integrationskonstante C allgemein lösbar. Die Integrationskonstante bestimmt sich, falls vorhanden, aus der Anfangsbedingung der Differenzialgleichung y(a) = b, so dass sich in eindeutiger Weise eine spezielle Lösung für die Funktion y(x) ergibt.

II. Wir formen unter Trennung der Variablen und unter Verwendung der Anfangsbedingung $y(3) = 2$ wie folgt um:

$yy' = x^2$ (Ersetzen: $y' = \frac{dy}{dx}$)

$y \cdot \frac{dy}{dx} = x^2$ | ·dx

$ydy = x^2 dx$ (Variablen getrennt, Integration, Integrationsgrenzen <- Anfangsbedingung: x=3, y=2)

$\int_2^y y*dy* = \int_3^x x*^2\ dx$ (Integralbestimmung)

$\left[\frac{1}{2}y*^2\right]_2^y = \left[\frac{1}{3}x*^3\right]_3^x$ (Ausrechnen der bestimmten Integrale)

$\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} \cdot 3^3$

$\frac{1}{2}y^2 - 2 = \frac{1}{3}x^3 - 9$ | +2

$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{3}x^3 - 7$ | ·2

$y^2 = \frac{2}{3}x^3 - 14$ | √

$y = \sqrt{\frac{2}{3}x^3 - 14}$

www.michael-buhlmann.de / 05.2021 / Aufgabe 1396