Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> Substitution, Trennung der Variablen

Aufgabe: Löse die Differenzialgleichung:

$$y' = \frac{y}{x} + 1.$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differenzialgleichung der Form:

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y)$$

ist vermöge der unbestimmten Integrale:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

mit der Integrationskonstante C allgemein lösbar. Die Integrationskonstante bestimmt sich, falls vorhanden, aus der Anfangsbedingung der Differenzialgleichung y(a) = b, so dass sich in eindeutiger Weise eine spezielle Lösung für die Funktion y(x) ergibt.

Der Trennung der Variablen kann unter Umständen eine Substitution voraufgehen, etwa mit: z = z(x) = φ(x,y) und z‘ = dz/dx = ψ(x,y‘) als Teile der Differenzialgleichung.

II. Wir substituieren in der Differenzialgleichung:

$y' = \frac{y}{x} + 1$ (*)

zunächst mit: z = $\frac{y}{x}$ ⇔ xz =y und (nach der Produktregel) y‘ = 1z + xz‘ = z +xz‘, so dass durch die Substitution die Differenzialgleichung (*) zu:

z + xz‘ = z + 1	| -z
xz‘ = 1	(**)

wird. Die Differenzialgleichung (**) formen wir unter Trennung der Variablen wie folgt um:

xz‘ = 1	(Ersetzen: $z' = \frac{dz}{dx}$)
$x\frac{dz}{dx} = 1$	| ·dx
$xdz = dx$	| :x
$dz = \frac{1}{x}dx$	(Variablen getrennt, Integration mit Integrationskonstante C)
$\int dz = \int \frac{1}{x}dx + C$	(Berechnung der Integrale)
$z = \ln\|x\| + C$	(***).

Rücksubstitution auf Grund von z = $\frac{y}{x}$ ergibt in (***):

$$\frac{y}{x} = \ln|x| + C \qquad | \cdot x$$

$$y = x\ln|x| + Cx$$

und damit die Lösung der Differenzialgleichung.

III. Eine <u>Probe</u> ergibt in der Tat:

$$y = x\ln|x| + Cx \;\Rightarrow\; y' = 1 \cdot \ln|x| + x \cdot \frac{1}{x} + C = \ln|x| + 1 + C$$

und:

$$\frac{y}{x} + 1 = \frac{x\ln|x| + Cx}{x} + 1 = \ln|x| + C + 1 = y'\,.$$

www.michael-buhlmann.de / 11.2021 / Aufgabe 1521