**Michael Buhlmann**

# Mathematikaufgaben
## > Differenzialgleichungen
## > Trennung der Variablen

---

**Aufgabe**: Löse die Differenzialgleichung mit Anfangsbedingung:

$$\frac{1}{x}y' = 2(y+1)\,,\ y(-1) = \frac{3}{2}\,.$$

**Lösung**: I. Allgemein gilt: Eine Differenzialgleichung der Form:

$$y'(x) = f(x)\cdot g(y)$$

ist vermöge der unbestimmten Integrale:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

mit der Integrationskonstante C allgemein lösbar. Die Integrationskonstante bestimmt sich, falls vorhanden, aus der Anfangsbedingung der Differenzialgleichung y(a) = b, so dass sich in eindeutiger Weise eine spezielle Lösung für die Funktion y(x) ergibt.

II. Wir schreiben die Differenzialgleichung um:

$\frac{1}{x}y' = 2(y+1)$ (Ersetzen: $y' = \frac{dz}{dx}$)

$\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dx} = 2(y+1)$ | ·xdx

$dy = 2(y+1)xdx$ | :(y+1)

$\frac{dy}{y+1} = 2xdx$ (Variablen getrennt, Integration mit Integrationskonstante C)

$\int \frac{dy}{y+1} = \int 2xdx + C$ (Berechnung der Integrale)

$\ln|y+1| = x^2 + C$ | $e^{()}$

$y+1 = e^{x^2+C}$ | -1

$y = e^{x^2+C} - 1$

und erhalten damit die <u>allgemeine Lösung</u> der Differenzialgleichung.

III. Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt:

$$y(-1) = e^{(-1)^2+C} - 1 = e^{1+C} - 1 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow e^{1+C} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 1+C = \ln(\frac{5}{2}) \Leftrightarrow C = \ln(\frac{5}{2}) - 1$$

und die spezielle Lösung der Differenzialgleichung:

$$y = e^{x^2+\ln\left(\frac{5}{2}\right)-1} - 1 = \frac{5}{2e}e^{x^2} - 1\,.$$

www.michael-buhlmann.de / 11.2021 / Aufgabe 1528