Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> Trennung der Variablen

Aufgabe: Löse die Differenzialgleichung:

$$y^r y'^s = 1 \text{ , r, s > 0.}$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine Differenzialgleichung der Form:

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y)$$

ist vermöge der unbestimmten Integrale:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

mit der Integrationskonstante C allgemein lösbar. Die Integrationskonstante bestimmt sich, falls vorhanden, aus der Anfangsbedingung der Differenzialgleichung y(a) = b, so dass sich in eindeutiger Weise eine spezielle Lösung für die Funktion y(x) ergibt.

II. Wir formen und schreiben die Differenzialgleichung bei beliebigen reellen Zahlen r, s > 0 um:

$y^r y'^s = 1$	| $\sqrt[s]{\ }$
$y^{\frac{r}{s}} y' = 1$	(Ersetzen: $y' = \frac{dy}{dx}$)
$y^{\frac{r}{s}} \cdot \frac{dy}{dx} = 1$	| ·dx
$y^{\frac{r}{s}} \cdot dy = dx$	(Variablen getrennt, Integration mit Integrationskonstante C)
$\int y^{\frac{r}{s}} dy = \int dx + C$	(Berechnung der Integrale)
$\frac{1}{\frac{r}{s}+1} y^{\frac{r}{s}+1} = x + C$	(Termumformung)
$\frac{s}{r+s} y^{\frac{r+s}{s}} = x + C$	| $: \frac{s}{r+s}$
$y^{\frac{r+s}{s}} = \frac{r+s}{s}(x+C)$	| $(\ )^{\frac{s}{r+s}}$

$$y = \left(\frac{r+s}{s}(x+C)\right)^{\frac{s}{r+s}} = \sqrt[r+s]{\left(\frac{r+s}{s}(x+C)\right)^s}$$

und erhalten damit die <u>allgemeine Lösung</u> der Differenzialgleichung.

III. Als Beispiele seien noch die folgenden Differenzialgleichungen mit den zugehörigen Lösungen genannt:

r, s	**Differenzialgleichung**	**Lösung**
r = 1, s = 0,5	$y\cdot\sqrt{y'}=1$	$y=\left(3(x+C)\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{3(x+C)}$
r = 1, s = 1	$yy'=1$	$y=\left(2(x+C)\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2(x+C)}$
r = 1, s = 2	$yy'^2=1$	$y=\left(\frac{3}{2}(x+C)\right)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}(x+C)\right)^2}$
r = 2, s = 1/3	$y^2\cdot\sqrt[3]{y'}=1$	$y=\left(7(x+C)\right)^{\frac{1}{7}}=\sqrt[7]{7(x+C)}$
r = 5/2, s = 1/4	$\sqrt{y^5}\cdot\sqrt[4]{y'}=1$	$y=\left(11(x+C)\right)^{\frac{1}{11}}=\sqrt[11]{11(x+C)}$
r = 4, s = 1	$y^4y'=1$	$y=\left(5(x+C)\right)^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{5(x+C)}$
r = 100, s = 10	$y^{100}y'^{10}=1$	$y=\left(11(x+C)\right)^{\frac{1}{11}}=\sqrt[11]{11(x+C)}$
r = s	$y^sy'^s=1$	$y=\left(2(x+C)\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2(x+C)}$
r = 2s	$y^{2s}y'^s=1$	$y=\left(3(x+C)\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{3(x+C)}$

www.michael-buhlmann.de / 11.2025 / Aufgabe 2512