Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Differenzialgleichungen
> Variation der Konstanten

Aufgabe: Löse die Differenzialgleichung mit Anfangsbedingung:

$$y' - \frac{y}{x} = x^2,\ y(1) = \frac{5}{2}.$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine homogene Differenzialgleichung der Form:

$$y'(x) + f(x) \cdot y = 0$$

ist durch Trennung der Variablen vermöge der unbestimmten Integrale:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int f(x)dx + C_1$$

mit der Integrationskonstante C_1 allgemein lösbar. Es ergibt sich die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung:

$$y = Ce^{-\int f(x)dx}$$

mit Integrationskonstante C, Cε**R**.

II. Für eine Differenzialgleichung der Form:

$$y'(x) + f(x) \cdot y = g(x)$$

ist: $y'(x) + f(x) \cdot y = 0$ die homogene Differenzialgleichung; die Lösung ist: $y_h(x) = Ce^{-\int f(x)dx}$ mit Integrationskonstante C. Für die inhomogene Differenzialgleichung: $y'(x) + f(x) \cdot y = g(x)$ mit g(x) ≠ 0 gilt dann durch Variation der Konstanten C zu einer Funktion C(x) die Beziehung:

$$y(x) = C(x)e^{-\int f(x)dx} \Rightarrow y'(x) = \left(C'(x) - f(x)C(x)\right)e^{-\int f(x)dx},$$

so dass sich eine Differenzialgleichung in C(x) ergibt:

$$\left(C'(x) - f(x)C(x)\right)e^{-\int f(x)dx} + f(x) \cdot C(x)e^{-\int f(x)dx} = g(x),$$

die, nach C'(x) umgestellt:

$$C'(x) = g(x) \cdot e^{\int f(x)dx},$$

durch Integration von C'(x) zu C(x) zur partikulären Lösung $y_p(x) = \int g(x) \cdot e^{\int f(x)dx} dx$ der inhomogenen Differenzialgleichung führt. Die Gesamtlösung ist: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$. Die Integrationskonstante C der Lösung der homogenen Differenzialgleichung bestimmt sich, falls vorhanden, aus der Anfangsbedingung der Differenzialgleichung y(a) = b, so dass sich in eindeutiger Weise eine spezielle Lösung für die Funktion y(x) ergibt.

III. Die vorgegebene Differenzialgleichung $y' - \frac{y}{x} = x^2$ kann so nicht durch Trennung der Variablen gelöst werden. Wir betrachten daher die homogene Differenzialgleichung $y' - \frac{y}{x} = 0$ und schreiben sie um:

$$y' - \frac{y}{x} = 0 \qquad \left| + \frac{y}{x}\right.$$

$y' = \frac{y}{x}$ (Ersetzen: $y' = \frac{dz}{dx}$)

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ | $\cdot dx$

$dy = \frac{y}{x} dx$ | :y

$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ (Variablen getrennt, Integration mit Integrationskonstante C_1)

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + C_1$ (Berechnung der Integrale)

$\ln|y| = \ln|x| + C_1$ | $e^{()}$ (mit: C = e^{C_1})

$y = Cx$

und erhalten damit $y_h(x) = Cx$ als Lösung der homogenen Differenzialgleichung.

IV. Zur inhomogenen Differenzialgleichung $y' - \frac{y}{x} = x^2$ führen wir eine Variation der Konstanten durch, indem wir in der Lösung der homogenen Differenzialgleichung $y_h(x) = Cx$ die Konstante C zu einer Funktion C(x) machen. Es gilt der Ansatz: y(x) = C(x)x bei: y'(x) = C'(x)x + C(x) gemäß der Produktregel. Die Differenzialgleichung $y' - \frac{y}{x} = x^2$ wird damit zu:

$$y' - \frac{y}{x} = x^2 \Rightarrow C'(x)x + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = C'(x)x + C(x) - C(x) = C'(x)x = x^2 .$$

Teilen durch x und anschließende Integration führt auf:

$C'(x)x = x^2$ | :x

$C'(x) = x$ (Integration)

$C(x) = \int x dx$ (Stammfunktion)

$C(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Dann ist: $y_p(x) = C(x)x = \frac{1}{2}x^2 \cdot x = \frac{1}{2}x^3$ die partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung. Als Gesamtlösung ergibt sich: $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Cx + \frac{1}{2}x^3$.

V. Einsetzen der Anfangsbedingung in die Lösung y(x) = $Cx + \frac{1}{2}x^3$ ergibt:

$y(1) = C \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1^3 = C + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ ⇔ C = 2.

Die spezielle Lösung der Differenzialgleichung $y' - \frac{y}{x} = x^2$, $y(1) = \frac{5}{2}$, lautet damit:

y(x) = $2x + \frac{1}{2}x^3$.

www.michael-buhlmann.de / 12.2021 / Aufgabe 1535