Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie
> Dreieckskonstruktion und -berechnung

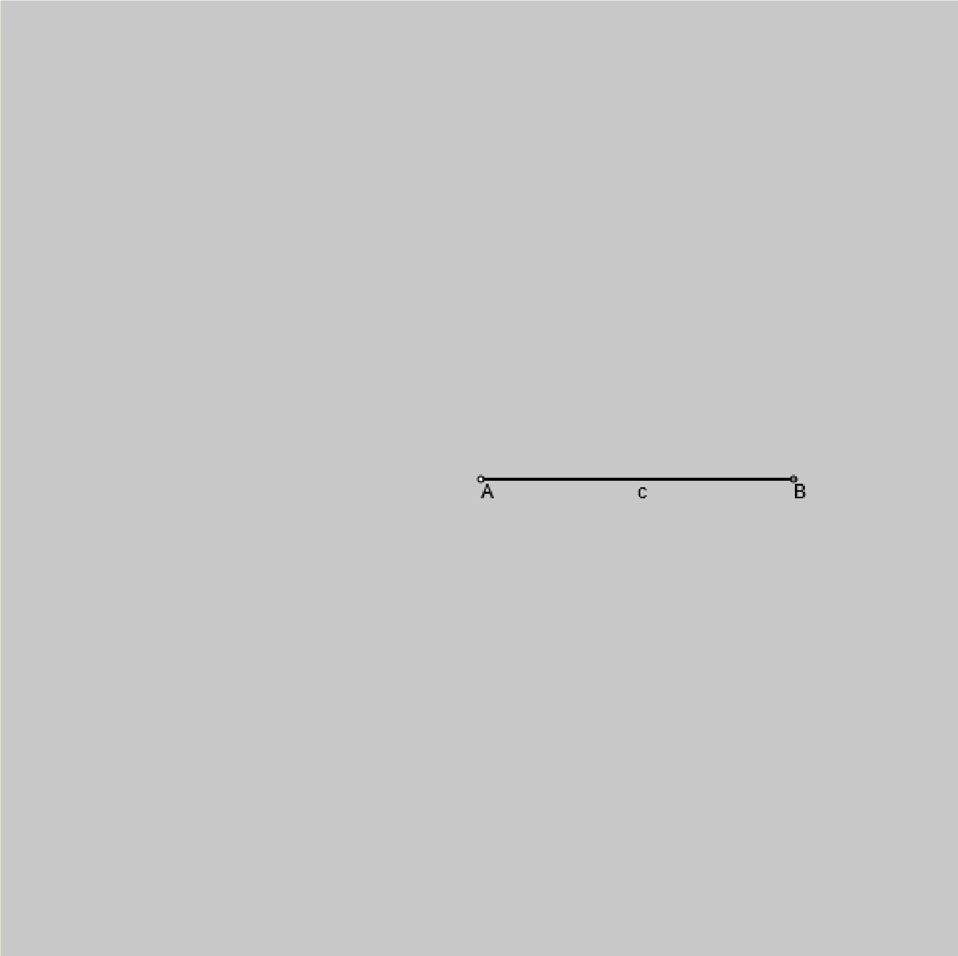
Aufgabe: Ein Dreieck ABC besitzt die Seitenlänge c = 8 [LE] sowie die Winkel $\alpha = 35°$ und $\beta = 82°$ (LE = Längeneinheiten).

a) Konstruiere aus den vorgegebenen Eigenschaften das Dreieck ABC.

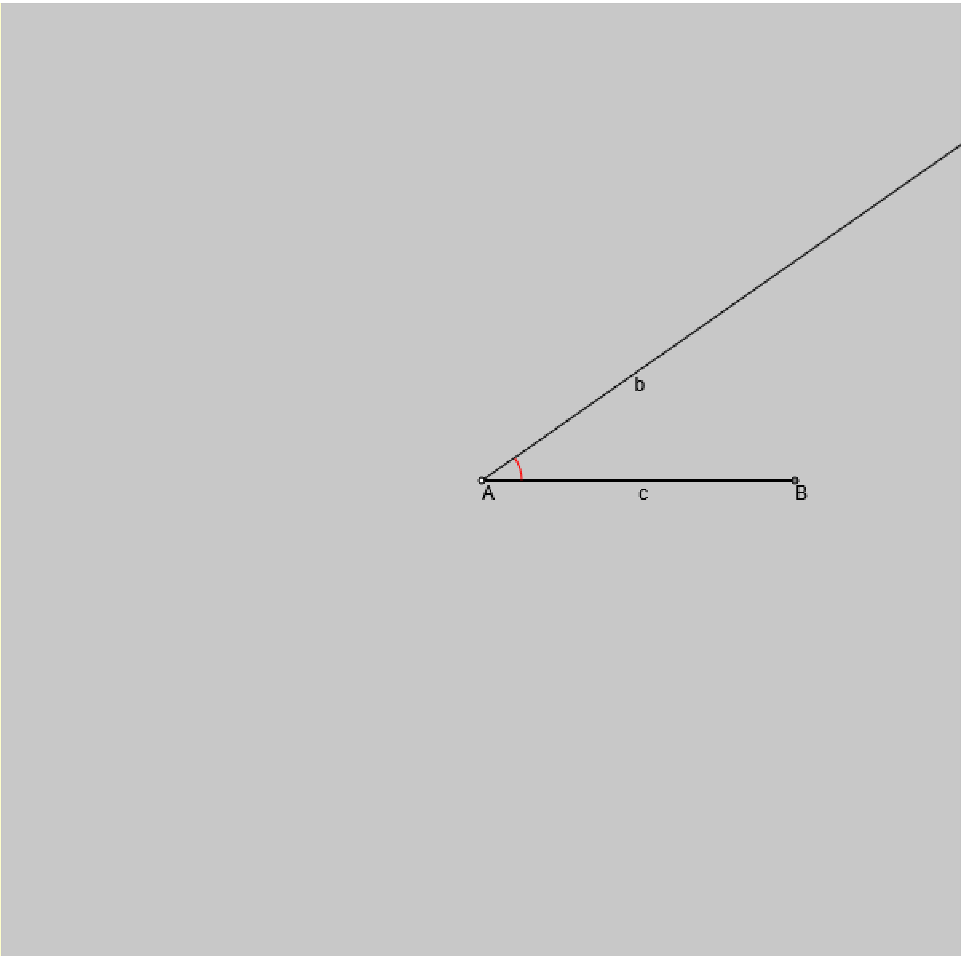
b) Berechne die fehlenden Seiten und Winkel im Dreieck ABC.

Lösung: a) Die geometrische Dreieckskonstruktion erfolgt nach dem Kongruenzsatz WSW mit der Seite c als Strecke zwischen den Ecken A und B und den Winkeln α und β bei A und B. Damit gilt:

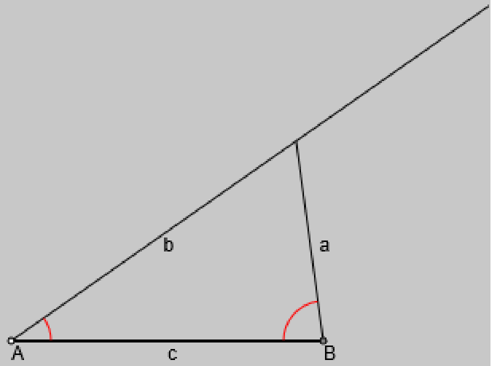
Schritt 1: Zeichne die Dreiecksseite c = 8 [LE] zwischen den Ecken A und B des Dreiecks.



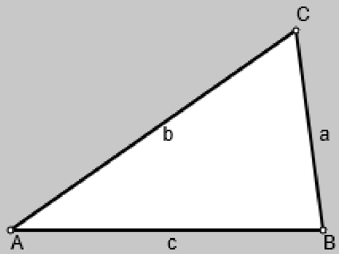
Schritt 2: Trage an der Ecke A den Winkel α = 35° ab. (Auf dem Schenkel des Winkels α liegt die Seite b des Dreiecks.)



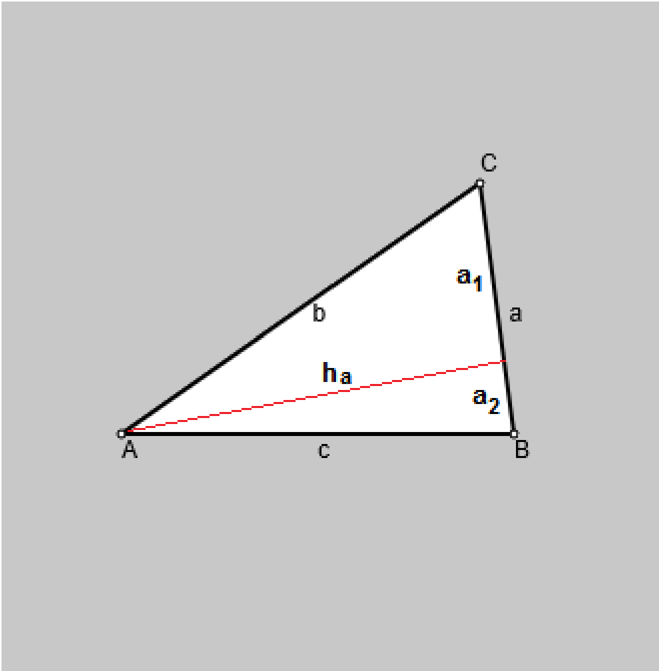
Schritt 3: Trage an der Ecke B den Winkel $\beta = 82°$ ab. (Auf dem Schenkel des Winkels β liegt die Seite a des Dreiecks.)



Schritt 4: Der Schnittpunkt der Schenkel der Winkel α und β ist die Ecke C des Dreiecks.



b) I. Es handelt sich um ein beliebiges Dreieck ABC mit den Winkeln α = 35°, β = 82° und γ = 180° – 35° – 82° = 63°. Zur Berechnung der noch fehlenden Seiten a und b teilen wir das Dreieck ABC entlang der Höhe h_a (zur Dreieckseite a) in zwei rechtwinklige Dreiecke (unteres, oberes rechtwinkliges Dreieck) auf:



II. Im unteren rechtwinkligen Dreieck ist die Seite c = 8 [LE] und der Winkel β = 82° vorhanden, so dass sich etwa die Höhe h_a über den Sinus (als Gegenkathete geteilt durch die Hypotenuse) berechnen lässt:

$\sin\beta = \frac{h_a}{c}$ => $\sin 82° = \frac{h_a}{8}$ => $8 \cdot \sin 82° = h_a$ => h_a = 7,92 [LE].

Mit dem Satz des Pythagoras berechnen wir die dritte Seite a_2 als Kathete im unteren rechtwinkligen Dreieck und erhalten:

$a_2^2 = c^2 - h_a^2$ => $a_2^2 = 8^2 - 7{,}92^2 = 1{,}27$ => a_2 = 1,13 [LE].

Damit sind alle Seiten im unteren rechtwinkligen Dreieck bestimmt.

III. Wir wenden uns dem oberen rechtwinkligen Dreieck zu und bestimmen mit Hilfe der Höhe h_a und dem Winkel γ zuerst die Seite a_1, indem wir den Tangens (als Gegenkathete geteilt durch Ankathete) benutzen:

$\tan\gamma = \frac{h_a}{a_1}$ => $\tan 63° = \frac{7{,}92}{a_1}$ => $a_1 = \frac{7{,}92}{\tan 63°}$ => a_1 = 4,04 [LE].

Die Seite a des Dreiecks ABC ist dann bestimmt, wenn wir a_1 und a_2 zusammenzählen; also:

a = a_1 + a_2 = 4,04 + 1,13 = 5,17 [LE].

Die Seite b des Dreiecks ABC erhalten wir durch Anwenden des Satzes des Pythagoras im oberen rechtwinkligen Dreieck; die Seite b ist hier die Hypotenuse, die Seiten a_1 und h_a sind die Katheten:

$b^2 = a_1^2 + h_a^2$ => $b^2 = 4{,}04^2 + 7{,}92^2 = 79{,}05$ => b = 8,89 [LE].

Damit sind alle Seiten und alle Winkel des beliebigen Dreiecks ABC bestimmt.

IV. Beachte noch, dass bzgl. Sinus, Kosinus und Tangens für das Errechnen einer unbekannten Seitenlänge x folgende Regeln gelten:

$\sin\varphi = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c\sin\varphi$, $\cos\varphi = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c\cos\varphi$, $\tan\varphi = \frac{x}{b} \Rightarrow x = b\tan\varphi$

(Multiplikation mit dem Nenner des Bruchs, wenn die Unbekannte im Zähler steht)

$\sin\varphi = \frac{a}{x} => x = \frac{a}{\sin\varphi}$, $\cos\varphi = \frac{a}{x} => x = \frac{a}{\cos\varphi}$, $\tan\varphi = \frac{b}{x} => x = \frac{b}{\tan\varphi}$

(Vertauschen der Unbekannten mit dem Sinus, Kosinus oder Tangens, wenn die Unbekannte im Nenner des Bruchs steht).

Für den Satz des Pythagoras in einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse c und den Katheten a und b gelten schließlich die Umformungen:

$c^2 = a^2 + b^2 => c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$a^2 = c^2 - b^2 => a = \sqrt{c^2 - b^2}$

$b^2 = c^2 - a^2 => b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

www.michael-buhlmann.de / 02.2017 / Aufgabe 302