Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Ebenen

Aufgabe: Bestimme die Schnittgerade und den Schnittwinkel der zwei Ebenen E und F mit:

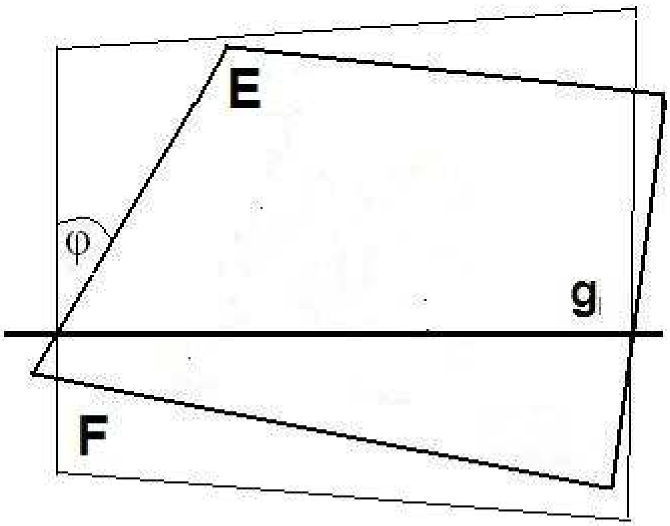
E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Lösung: I. Schnittgerade: Wir setzen zur Bestimmung der Schnittgeraden die Ebenen E und F gleich und erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Das lineare Gleichungssystem besitzt dann die Lösung: q = $-\frac{1}{3}-\frac{5}{3}u$, r = 0, s = $-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}u$, t = u beliebig. Wir setzen in F s ein und erhalten die Gleichung der Schnittgeraden:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{2}{3}-\frac{5}{3}u\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{13}{3} \end{pmatrix}$$



II. Schnittwinkel: Wir bestimmen mit Hilfe des Kreuzprodukts der Richtungsvektoren der jeweiligen Ebenen zwei Normalenvektoren der beiden Ebenen E und F als:

$$\vec{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{n_F} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir verwenden nun die Formel für Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen, d.h. für den Winkel zwischen den Normalenvektoren der Ebene:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overset{->}{n_E} \cdot \overset{->}{n_F}\right|}{\left|\overset{->}{n_E}\right| \cdot \left|\overset{->}{n_F}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|1|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$ => φ = 60°.

07.2014 / Aufgabe 24