Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Ebenen

Aufgabe: Bestimme die Schnittgerade und den Schnittwinkel der zwei Ebenen E und F mit:

$$E: x_1+x_2+2x_3 = 4, \; F: 3x_2+2x_3 = 6$$

1. Lösung: I. <u>Schnittgerade</u>: Wir lösen das aus den Koordinatenformen der Ebenen E und F bestehende lineare Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten und erhalten:

Lineares Gleichungssystem:

$+\ 1x_1\ +\ 1x_2\ +\ 2x_3\ =\ 4$

$\qquad +\ 3x_2\ +\ 2x_3\ =\ 6$

Anfangstableau:

x_1	x_2	x_3	R.S.
1	1	2	4
0	3	2	6

1. Schritt: (keine Umformung) /

1	1	2	4
0	3	2	6

2. Schritt: 3*(*1*) - 1*(*2*) /

3	0	4	6
0	3	2	6

Teilen: (*1*):3 / (*2*):3 /

1	0	1.3333	2
0	1	0.6667	2

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$+\ 1x_1\ +\ 1.3333x_3\ =\ 2$

$\qquad +\ 1x_2\ +\ 0.6667x_3\ =\ 2$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

x_3 = t

x_1 = 2 – 4t/3

x_2 = 2 – 2t/3

Das lineare Gleichungssystem besitzt dann die Lösung: x_1 = 2 – 4t/3, x_2 = 2 – 2t/3, x_3 = t für beliebiges reelles t. Wir erhalten die Gleichung der Schnittgeraden g wie folgt:

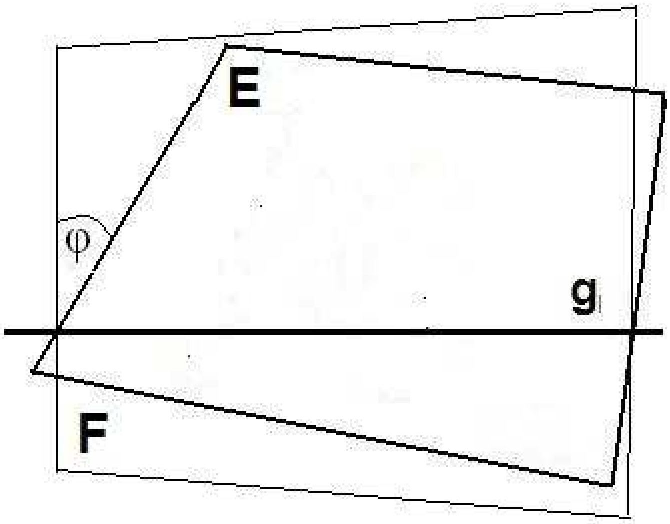
$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2-\frac{4}{3}t \\ 2-\frac{2}{3}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\frac{4}{3}t \\ 2-\frac{2}{3}t \\ 0+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}t \\ -\frac{2}{3}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

II. <u>Schnittwinkel</u>: Mit den zwei Normalenvektoren der beiden Ebenen E und F:

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

verwenden wir die Formel für Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen, d.h. für den Winkel φ zwischen den Normalenvektoren der Ebene:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{n}_E \cdot \vec{n}_F\right|}{\left|\vec{n}_E\right| \cdot \left|\vec{n}_F\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}\right|} = \frac{|3+4|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{13}} = 0{,}7926 \Rightarrow \varphi = 37{,}57°.$$



2. Lösung: I. Schnittgerade der Form: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$: Die nichtparallelen und sich damit schneidenden Ebenen E und F haben die Normalenvektoren:

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\ \vec{n}_F = \begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$$

Als Richtungsvektor der Schnittgeraden ergibt sich das Kreuzprodukt dieser Normalenvektoren:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-2\\3\end{pmatrix}.$$

Aus dem linearen Gleichungssystem

$x_1+x_2+2x_3 = 4$
$3x_2+2x_3 = 6$

ergibt sich mit $x_3=0$ das reduzierte, eindeutig lösbare Gleichungssystem:

$x_1+x_2 = 4$
$3x_2 = 6$

mit den Lösungen $x_2 = 2$ und $x_1 = 2$ (bei $x_3=0$). Der Stützvektor der Schnittgeraden g ist somit:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}.$$

Die Schnittgerade insgesamt lautet: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\-2\\3\end{pmatrix}$.

II. <u>Schnittwinkel</u>: Mit den zwei Normalenvektoren der beiden Ebenen E und F:

$$\overset{->}{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overset{->}{n_F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

verwenden wir die Formel für Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen, d.h. für den Winkel φ zwischen den Normalenvektoren der Ebene:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overset{->}{n_E} \cdot \overset{->}{n_F}\right|}{\left|\overset{->}{n_E}\right| \cdot \left|\overset{->}{n_F}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|3+4|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{13}} = 0{,}7926$$ => φ = 37,57°.

www.michael-buhlmann.de / 08.2014 / Aufgabe 36