Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Ebenen

Aufgabe: Zeichne die zwei Ebenen E und F mit:

$$E: 4x_1+x_2+x_3 = 8, \; F: 2x_1+2x_2+4x_3 = 8$$

sowie die Schnittgerade in das dreidimensionale kartesische Koordinatensystem ein. Wie lautet eine Parameterdarstellung dieser Schnittgeraden?

1. Lösung: I. Die Spurpunkte für Ebenen in Koordinatenform, also die Schnittpunkte von Ebenen mit den Koordinatenachsen, errechnen sich gemäß nachstehendem Schema: Ist eine Ebene E als Koordinatengleichung E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ mit reellen a, b, c, d gegeben, so ergeben sich als Spurpunkte auf den Koordinatenachsen:

x_1-Achse: Spurpunkt $S_1(d/a|0|0)$ bei $a\neq0$, kein Spurpunkt S_1 bei $a=0$
x_2-Achse: Spurpunkt $S_2(0|d/b|0)$ bei $b\neq0$, kein Spurpunkt S_2 bei $b=0$
x_3-Achse: Spurpunkt $S_3(0|0|d/c)$ bei $c\neq0$, kein Spurpunkt S_3 bei $c=0$.

Besitzt die Ebene keinen Spurpunkt auf einer Koordinatenachse, so ist sie zu dieser Achse (bzw. zu diesen Achsen, d.h. einer Grundebene des Koordinatensystems) parallel.

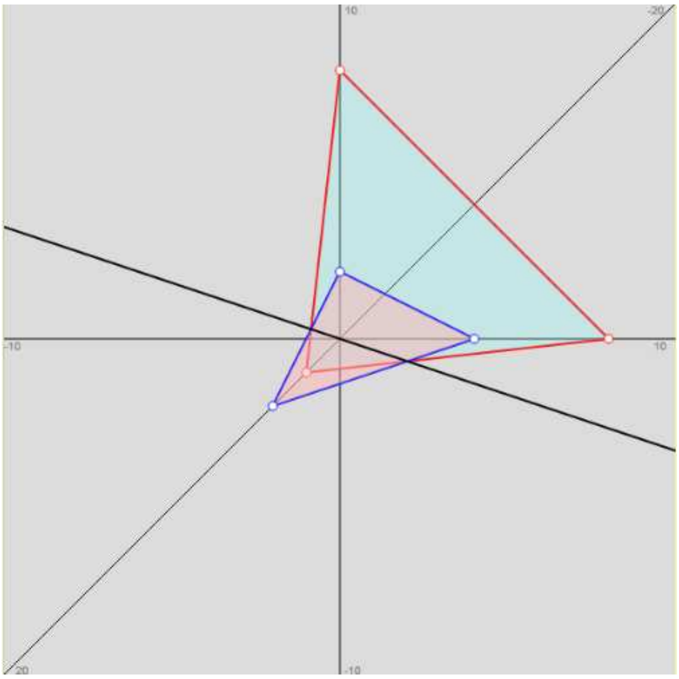
II. Wir berechnen die Spurpunkte der Ebene E: $4x_1+x_2+x_3 = 8$ als:

x_1-Achse: $x_1 = 8:4 = 2$ => Spurpunkt $S_1(2|0|0)$
x_2-Achse: $x_2 = 8:1 = 8$ => Spurpunkt $S_2(0|8|0)$
x_3-Achse: $x_3 = 8:1 = 8$ => Spurpunkt $S_3(0|0|8)$.

III. Wir berechnen die Spurpunkte der Ebene F: $2x_1+2x_2+4x_3 = 8$ als:

x_1-Achse: $x_1 = 8:2 = 4$ => Spurpunkt $T_1(4|0|0)$
x_2-Achse: $x_2 = 8:2 = 4$ => Spurpunkt $T_2(0|4|0)$
x_3-Achse: $x_3 = 8:4 = 2$ => Spurpunkt $T_3(0|0|2)$.

IV. Es ergeben sich die Ausschnitte der Ebenen E und F als Spurpunktdreiecke. Die Schnittgerade g verläuft durch die Schnittpunkte der sich schneidenden Spurgeraden der Ebenen E und F in der x_1-x_2- und x_1-x_3-Grundebene:



V. <u>Schnittgerade</u>: Wir lösen das aus den Koordinatenformen der Ebenen E und F bestehende lineare Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten und erhalten:

Lineares Gleichungssystem:

$+\ 4x_1\ +\ 1x_2\ +\ 1x_3\ =\ 8$

$+\ 2x_1\ +\ 2x_2\ +\ 4x_3\ =\ 8$

Anfangstableau:

x_1	x_2	x_3	R.S.
4	1	1	8
2	2	4	8

1. Schritt: 2*(*2*) – (*1*) /

4	1	1	8
0	3	7	8

Gleichung (*3*) (0 = 0) ergänzen /

4	1	1	8
0	3	7	8
0	0	0	0

(unendlich viele) Lösungen des linearen Gleichungssystems:

x_3 = t

$3x_2$ + 7t = 8 => $3x_2$ = 8 – 7t => x_2 = 8/3 – 7t/3

$4x_1$ + (8/3–7t/3) + t = 8 => $4x_1$ + 8/3 – 4t/3 = 8 => $4x_1$ = 16/3 + 4t/3 => x_1 = 4/3 + t/3

Das lineare Gleichungssystem besitzt dann die Lösung: x_1 = 4/3 + t/3, x_2 = 8/3 – 7t/3, x_3 = t für beliebiges reelles t. Wir erhalten die Gleichung der Schnittgeraden g wie folgt:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}+\frac{1}{3}t \\ \frac{8}{3}-\frac{7}{3}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}+\frac{1}{3}t \\ \frac{8}{3}-\frac{7}{3}t \\ 0+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{8}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t \\ -\frac{7}{3}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{8}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

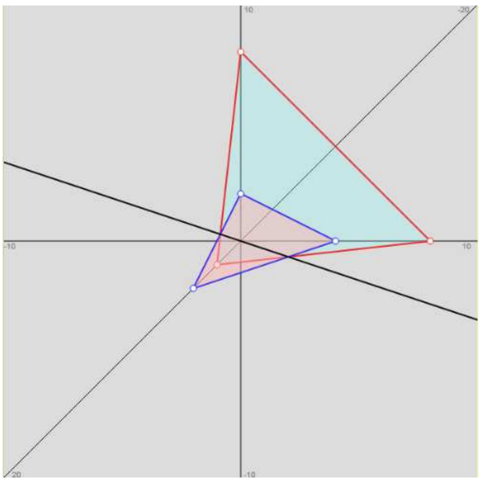
2. Lösung: I. Wir berechnen die <u>Spurpunkte der Ebene E</u>: $4x_1+x_2+x_3 = 8$ als:

x_1-Achse: x_1 = 8:4 = 2 => Spurpunkt $S_1(2|0|0)$
x_2-Achse: x_2 = 8:1 = 8 => Spurpunkt $S_2(0|8|0)$
x_3-Achse: x_3 = 8:1 = 8 => Spurpunkt $S_3(0|0|8)$.

II. Wir berechnen die <u>Spurpunkte der Ebene F</u>: $2x_1+2x_2+4x_3 = 8$ als:

x_1-Achse: x_1 = 8:2 = 4 => Spurpunkt $T_1(4|0|0)$
x_2-Achse: x_2 = 8:2 = 4 => Spurpunkt $T_2(0|4|0)$
x_3-Achse: x_3 = 8:4 = 2 => Spurpunkt $T_3(0|0|2)$.

III. Es ergeben sich die Ausschnitte der Ebenen E und F als Spurpunktdreiecke. Die Schnittgerade g verläuft durch die Schnittpunkte der sich schneidenden Spurgeraden der Ebenen E und F in der x_1-x_2- und x_1-x_3-Grundebene:



V. <u>Schnittgerade</u> der Form: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$: Die nichtparallelen und sich damit schneidenden Ebenen E und F haben die Normalenvektoren:

$$\vec{n_E} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{n_F} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Als Richtungsvektor der Schnittgeraden ergibt sich das Kreuzprodukt dieser Normalenvektoren:

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -14 \\ 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aus dem linearen Gleichungssystem

$4x_1+x_2+x_3 = 8$
$2x_1+2x_2+4x_3 = 8$

ergibt sich mit $x_3=0$ das reduzierte, eindeutig lösbare Gleichungssystem:

$4x_1+x_2 = 8$ |·(-2)
$2x_1+2x_2 = 8$

$-8x_1-2x_2 = -16$ (Addition der beiden Gleichungen)
$2x_1+2x_2 = 8$

$-6x_1 = -8 \Rightarrow x_1 = 4/3$
$16/3+x_2 = 8 \Rightarrow x_2 = 8/3$

mit den Lösungen $x_1 = 4/3$ und $x_2 = 8/3$ (bei $x_3=0$). Der Stützvektor der Schnittgeraden g ist somit:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{8}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Schnittgerade insgesamt lautet: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{8}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

www.michael-buhlmann.de / 12.2015 / Aufgabe 174