Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Ebenen

Aufgabe: Zeige, dass sich die drei Ebenen E, F und G mit:

$$E: x_1 = 4,\ F: x_1+2x_2 = 10,\ G: x_1+x_2 = 7$$

in einer Schnittgerade g schneiden. Wie lautet eine Parameterdarstellung dieser Schnittgeraden?

Lösung: I. Im Fall der Existenz der Schnittgeraden ist das aus den Koordinatenformen der Ebenen E, F und G bestehende <u>lineare Gleichungssystem</u> mit drei Gleichungen und drei Unbekannten lösbar:

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$$\begin{array}{lllll} +\ 1x_1 & & & = & 4 \\ +\ 1x_1 & +\ 2x_2 & & = & 10 \\ +\ 1x_1 & +\ 1x_2 & & = & 7 \end{array}$$

<u>Anfangstableau</u>:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & R.S. \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 0 & 7 \end{array}$$

<u>1. Schritt</u>: 1*(*2*) - 1*(*1*) / 1*(*3*) - 1*(*1*) /

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}$$

<u>2. Schritt</u>: 2*(*3*) - 1*(*2*) /

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

<u>Teilen</u>: (*2*):2 /

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

<u>Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$$\begin{array}{lllll} +\ 1x_1 & & & = & 4 \\ & +\ 1x_2 & & = & 3 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}$$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

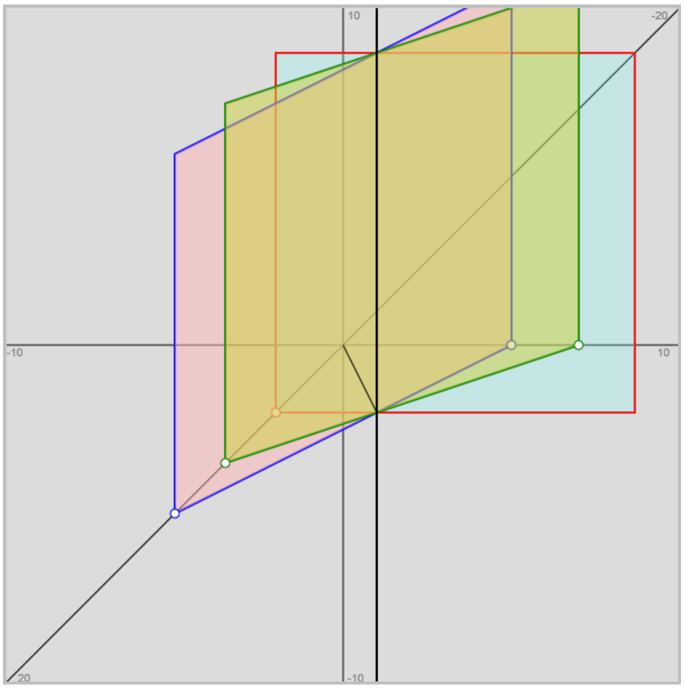
$x_3 = t$
$x_1 = 4$
$x_2 = 3.$

Das lineare Gleichungssystem besitzt also die Lösung: $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $x_3 = t$ für beliebiges reelles t.

II. Wir erhalten die Gleichung der <u>Schnittgeraden</u> g mit der reellen Zahl t als Parameter wie folgt:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0t \\ 3+0t \\ 0+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0t \\ 0t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

III. Zeichnerisch ergibt sich ein <u>Ebenenbüschel mit der Schnittgeraden</u> g = E ∩ F ∩ G, die wie die Ebenen parallel zur x_3-Achse des Koordinatensystems verläuft:



www.michael-buhlmann.de / 09.2017 / Aufgabe 486