Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Ebenen

Aufgabe: Zeige, dass sich die drei Ebenen E, F und G mit:

$E: 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12$, $F: 2x_1 + x_2 + x_3 = 5$, $G: 8x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 22$

in einer Schnittgerade g schneiden. Wie lautet eine Parameterdarstellung dieser Schnittgeraden?

Lösung: I. Im Fall der Existenz der Schnittgeraden ist das aus den Koordinatenformen der Ebenen E, F und G bestehende lineare Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten lösbar:

Lineares Gleichungssystem:

$$+\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12$$
$$+\ 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 5$$
$$+\ 8x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 22$$

Anfangstableau:

x_1	x_2	x_3	R.S.
4	2	3	12
2	1	1	5
8	4	5	22

1. Schritt: 2*(*2*) - 1*(*1*) / 1*(*3*) - 2*(*1*) /

4	2	3	12
0	0	-1	-2
0	0	-1	-2

2. Schritt: 1*(*1*) + 3*(*3*) / -1*(*2*) +1*(*3*) /

4	2	0	6
0	0	-1	-2
0	0	0	0

Zeilentausch: (*2*) <-> (*3*) /

4	2	0	6
0	0	0	0
0	0	-1	-2

Teilen: (*1*):4 / (*3*):(-1) /

1	0.5	0	1.5
0	0	0	0
0	0	1	2

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$+\ 1x_1 + 0.5x_2 = 1.5$$
$$0 = 0$$
$$+\ 1x_3 = 2$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

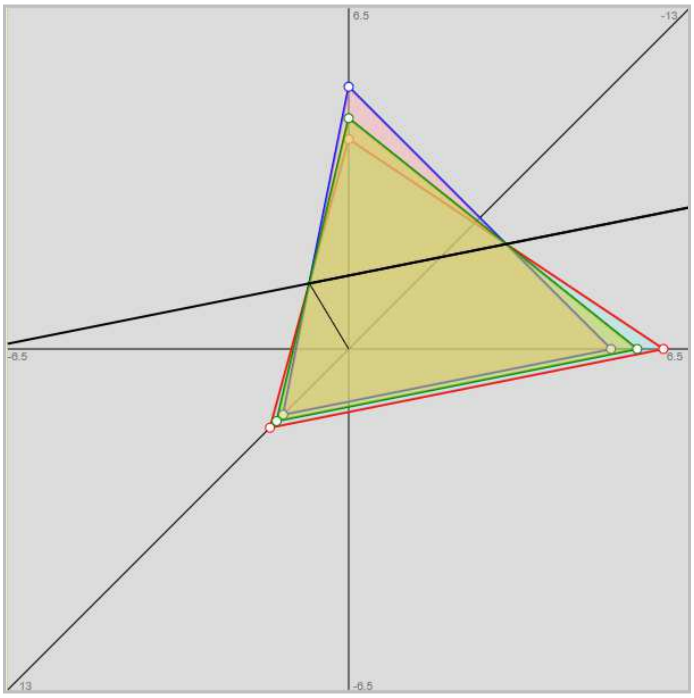
$x_2 = t$
$x_3 = 2$
$x_1 = 1.5-0.5t$.

Das lineare Gleichungssystem besitzt also die Lösung: x_1 = 1,5-0,5t, x_2 = t, x_3 = 2 für beliebiges reelles t.

II. Wir erhalten die Gleichung der Schnittgeraden g mit der reellen Zahl t als Parameter wie folgt:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5-0{,}5t \\ t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

III. Zeichnerisch ergibt sich ein Ebenenbüschel mit der Schnittgeraden g = E ∩ F ∩ G, die parallel zur x_1-x_2-Ebene des Koordinatensystems verläuft:



www.michael-buhlmann.de / 09.2017 / Aufgabe 487