Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Ebenen

Aufgabe: Berechne eine Parametergleichung der Schnittgeraden g der zwei Ebenen E und F und die Größe des Schnittwinkels φ. Für die Ebenen gilt:

$$E: 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 6,\ F: x_1 + 2x_2 = -4.$$

1. Lösung: I. Zur Ermittlung der Schnittgeraden ist ein <u>lineares Gleichungssystem</u>, bestehend aus den Koordinatengleichungen der zwei Ebenen, zu lösen. Es gilt:

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$$\begin{array}{rrrrrrrl} + & 3x_1 & - & 2x_2 & + & 1x_3 & = & 6 \\ + & 1x_1 & + & 2x_2 & & & = & -4 \end{array}$$

<u>Anfangstableau</u>:

$$\begin{array}{rrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & R.S. \\ 3 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & -4 \end{array}$$

<u>1. Schritt</u>: 3*(*2*) - 1*(*1*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 8 & -1 & -18 \end{array}$$

<u>2. Schritt</u>: 4*(*1*) + 1*(*2*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 12 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 8 & -1 & -18 \end{array}$$

<u>Teilen</u>: (*1*):12 / (*2*):8 /

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0.25 & 0.5 \\ 0 & 1 & -0.125 & -2.25 \end{array}$$

<u>Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$$\begin{array}{rrrrrrrl} + & 1x_1 & & & + & 0.25x_3 & = & 0.5 \\ & & + & 1x_2 & - & 0.125x_3 & = & -1.5 \end{array}$$

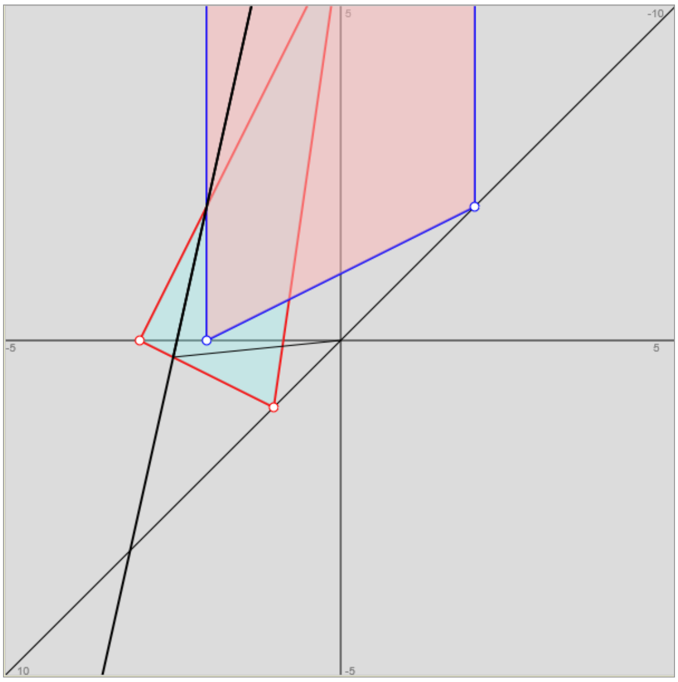
<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

$x_3 = t$
$x_1 = 0.5 - 0.25t$
$x_2 = -2.25 + 0.125t$.

Das lineare Gleichungssystem besitzt also die Lösung: $x_1 = 0{,}5-0{,}25t$, $x_2 = -2{,}25+0{,}125t$, $x_3 = t$ für beliebiges reelles t.

II. Wir erhalten die Gleichung der <u>Schnittgeraden</u> g mit reellem Parameter t wie folgt:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5-0{,}25t \\ -2{,}25+0{,}125t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -2{,}25 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -0{,}25 \\ 0{,}125 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



III. Der <u>Schnittwinkel</u> zwischen den Ebenen errechnet sich mit den Normalenvektoren der Ebenen E und F:

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gemäß der Formel für den Schnittwinkel φ von Ebenen:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{n}_E \cdot \vec{n}_F\right|}{\left|\vec{n}_E\right| \cdot \left|\vec{n}_F\right|}$$

als:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|3-4+0|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2} \cdot \sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{70}} = 0{,}1195\,,$$

woraus als Schnittwinkel φ = $\cos^{-1}(0{,}1195)$ = 83,14° folgt.

2. Lösung: I. Für die <u>Schnittgerade</u> der Form: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ der sich schneidenden Ebenen E und F ergibt sich der Richtungsvektor $\vec{u}$ aus den Normalenvektoren der Ebenen:

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und als Kreuzprodukt dieser Normalenvektoren:

$$\overset{->}{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Aus dem linearen Gleichungssystem der Ebenengleichungen:

$3x_1 – 2x_2 + x_3 = 6$
$x_1 + 2x_2 = -4$

ergibt sich z.B. mit $x_2=0$ das reduzierte, eindeutig lösbare Gleichungssystem:

$3x_1 + x_3 = 6$
$x_1 = -4$,

so dass die 1. Gleichung zu: $-12+x_3 = 6$ wird, also: $x_3 = 18$ gilt. Der Stützvektor der Schnittgeraden g ist somit:

$$\overset{->}{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Die Schnittgerade insgesamt lautet: g: $\overset{->}{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

II. Der <u>Schnittwinkel</u> zwischen den Ebenen errechnet sich mit den Normalenvektoren der Ebenen E und F:

$$\overset{->}{n}_E = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overset{->}{n}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gemäß der Formel für den Schnittwinkel φ von Ebenen:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overset{->}{n}_E \cdot \overset{->}{n}_F\right|}{\left|\overset{->}{n}_E\right| \cdot \left|\overset{->}{n}_F\right|}$$

als:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|3-4+0|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2} \cdot \sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{70}} = 0{,}1195,$$

woraus als Schnittwinkel $\varphi = \cos^{-1}(0{,}1195) = 83{,}14°$ folgt.

www.michael-buhlmann.de / 09.2017 / Aufgabe 488