Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Ebenen

Aufgabe: Berechne eine Parametergleichung der Schnittgeraden g der zwei Ebenen E und F und die Größe des Schnittwinkels φ. Für die Ebenen gilt:

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, F: $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 12$.

1. Lösung: I. Wegen der Schnittwinkelberechnung und des dafür benötigten Normalenvektors der Ebene E wird zunächst diese Ebene von der Parameterform in die Koordinatenform transformiert. Dazu berechnen wir den Normalenvektor als Kreuzprodukt der Richtungsvektoren (Spannvektoren) der Ebene und erhalten:

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen in die (modifizierte) Normalenform der Ebene ergibt:

E: $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} \cdot = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ => E: $3x_1 + 3x_2 - x_3 = 15+3+0 = 18$.

Die Ebenengleichung lautet also in Koordinatenform:

E: $3x_1 + 3x_2 - x_3 = 18$.

II. Zur Ermittlung der Schnittgeraden ist ein lineares Gleichungssystem, bestehend aus den Koordinatengleichungen der zwei Ebenen E und F, zu lösen. Es gilt:

Lineares Gleichungssystem:

$+ \ 3x_1 + 3x_2 - 1x_3 = 18$

$+ \ 2x_1 - 1x_2 + 3x_3 = 12$

Anfangstableau:

x_1	x_2	x_3	R.S.
3	3	-1	18
2	-1	3	12

1. Schritt: 3*(*2*) - 2*(*1*) /

3	3	-1	18
0	-9	11	0

2. Schritt: 3*(*1*) + 1*(*2*) /

9	0	8	54
0	-9	11	0

Teilen: (*1*):9 / (*2*):(-9) /

1 0 8/9 | 6
0 1 -11/9 | 0

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$+\ 1x_1 \quad + \ 8/9x_3 = 6$
$+\ 1x_2 - 11/9x_3 = 0$

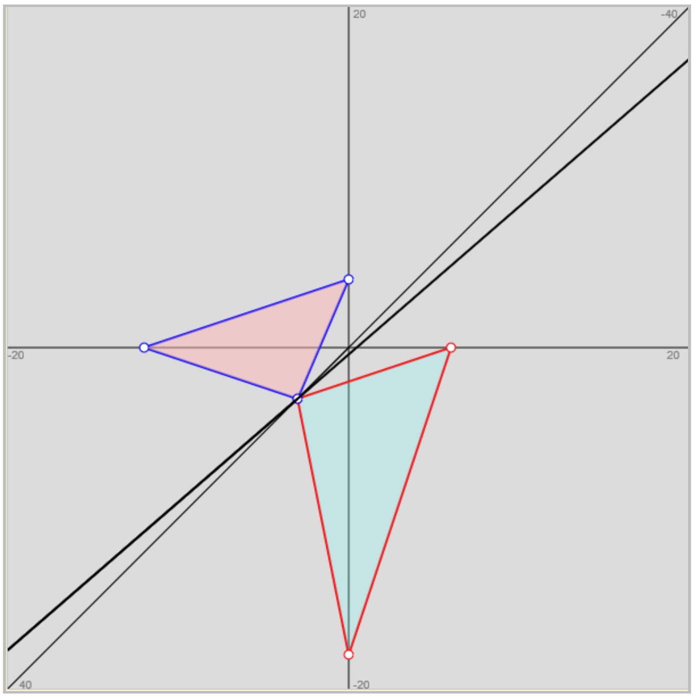
Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_3 = t$
$x_1 = 6 - 8t/9$
$x_2 = 11t/9.$

Das lineare Gleichungssystem besitzt also die Lösung: $x_1 = 6-8t/9$, $x_2 = 11t/9$, $x_3 = t$ für beliebiges reelles t.

III. Wir erhalten die Gleichung der Schnittgeraden g mit reellem Parameter t wie folgt:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-\frac{8}{9}t \\ \frac{11}{9}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -\frac{8}{9} \\ \frac{11}{9} \\ 1 \end{pmatrix}.$$



IV. Der Schnittwinkel zwischen den Ebenen errechnet sich mit den Normalenvektoren der Ebenen E und F:

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gemäß der Formel für den Schnittwinkel φ von Ebenen:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{n}_E \cdot \vec{n}_F\right|}{\left|\vec{n}_E\right| \cdot \left|\vec{n}_F\right|}$$

als:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}\right|\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}} = \frac{|6-3-3|}{\sqrt{3^2+3^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}} = 0,$$

woraus als Schnittwinkel φ = $\cos^{-1}(0)$ = 90° folgt. Die Ebenen E und F stehen also senkrecht aufeinander.

2. Lösung: I. Wegen der Schnittwinkelberechnung und des dafür benötigten Normalenvektors der Ebene E wird zunächst diese Ebene von der Parameterform in die Koordinatenform transformiert. Dazu berechnen wir den Normalenvektor als Kreuzprodukt der Richtungsvektoren (Spannvektoren) der Ebene und erhalten:

$$\overset{->}{n}_E = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}.$$

Einsetzen in die (modifizierte) Normalenform der Ebene ergibt:

E: $\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}\cdot\overset{->}{x}\cdot = \begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}$ => E: $3x_1 + 3x_2 - x_3 = 15+3+0 = 18$.

Die Ebenengleichung lautet also in Koordinatenform:

E: $3x_1 + 3x_2 - x_3 = 18$.

II. Für die Schnittgerade der Form: g: $\overset{->}{x} = \overset{->}{a} + t\,\overset{->}{u}$ der sich schneidenden Ebenen E und F ergibt sich der Richtungsvektor $\overset{->}{u}$ aus den Normalenvektoren der Ebenen:

$$\overset{->}{n}_E = \begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix},\ \overset{->}{n}_F = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$$

und als Kreuzprodukt dieser Normalenvektoren:

$$\overset{->}{u} = \begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-11\\-9\end{pmatrix}.$$

Aus dem linearen Gleichungssystem der Ebenengleichungen:

$3x_1 + 3x_2 - x_3 = 18$
$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 12$

ergibt sich z.B. mit x_1=0 das reduzierte, eindeutig lösbare Gleichungssystem:

$3x_2 - x_3 = 18$
$-x_2 + 3x_3 = 12$,

so dass die Multiplikation der 2. Gleichung mit dem Faktor 3 ergibt:

$3x_2 - x_3 = 18$
$-3x_2 + 9x_3 = 36$,

und die anschließende Addition der Gleichungen auf:

$8x_3 = 54$ => $x_3 = 6{,}75$

führt. Die Lösungen des reduzierten linearen Gleichungssystems sind somit: x_2 = 8,25, x_3 = 6,75. Der Stützvektor der Schnittgeraden g ist somit:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8{,}25 \\ 6{,}75 \end{pmatrix}.$$

Die Schnittgerade insgesamt lautet: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8{,}25 \\ 6{,}75 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 8 \\ -11 \\ -9 \end{pmatrix}$.

III. Der Schnittwinkel zwischen den Ebenen errechnet sich mit den Normalenvektoren der Ebenen E und F:

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gemäß der Formel für den Schnittwinkel φ von Ebenen:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{n}_E \cdot \vec{n}_F\right|}{\left|\vec{n}_E\right| \cdot \left|\vec{n}_F\right|}$$

als:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}} = \frac{|6-3-3|}{\sqrt{3^2+3^2+1^2} \cdot \sqrt{1^2+3^2}} = 0\,,$$

woraus als Schnittwinkel φ = $\cos^{-1}(0)$ = 90° folgt. Die Ebenen E und F stehen also senkrecht aufeinander.

3. Lösung: I. Wir stellen zunächst fest, dass die beiden Ebenen E und F senkrecht aufeinander stehen (Orthogonalität). Es gilt nämlich, dass sich der Normalenvektor der Ebene F als Linearkombination der Spannvektoren der Ebene E darstellen lässt wegen:

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ => 2 = r+s, -1 = -r, 3 = 3s => r=1, s=1.

Der Schnittwinkel beträgt mithin: φ = 90°.

II. Zur Bestimmung der Schnittgeraden zerlegen wir die in Parameterform gegebene Ebene E in ihre Komponenten, also:

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ -> x_1 = 5+r+s, x_2 = 1–r, x_3 = 3s.

Einsetzen von x_1, x_2, x_3 in die Koordinatenform der Ebene F ergibt:

F: $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 12$ => 2(5+r+s) – (1–r) +3(3s) = 12 => 10+2r+2s–1+r+9s = 12 => 3r+11s = 3.

Wir lösen die Gleichung nach r auf und erhalten:

3r+11s = 3 => 3r = 3–11s => r = 1–11s/3.

In der Gleichung der Ebene E lässt damit der Parameter r durch einen mathematischen Ausdruck in s ersetzen, wodurch sich die Schnittgerade ermitteln lässt:

g: $$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(1 - \frac{11}{3}s\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{11}{3}s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -\frac{8}{3} \\ \frac{11}{3} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Die Schnittgerade besitzt also die Parametergleichung: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -\frac{8}{3} \\ \frac{11}{3} \\ 3 \end{pmatrix}$.

www.michael-buhlmann.de / 09.2017 / Aufgabe 489