Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Ebenen

Aufgabe: a) Zeige, dass die Punkte A(2|-1|1), B(5|3|1), D(-2|2|6) ein rechtwinkliges Dreieck ΔABD bilden. Ergänze das Dreieck durch den Punkt C zu einem Rechteck.

b) Das Rechteck ABCD liegt auf einer Ebene E, deren Koordinatengleichung zu bestimmen ist.

c) Bestimme die Koordinatengleichung der Ebene F, die durch die Punkte A und D senkrecht zur Ebene E steht. Bestimme die Schnittgerade zwischen den beiden Ebenen.

d) Auch das Rechteck ABCD wird um 90° zur Ebene F gedreht. Bestimme die Koordinaten der Ecken des gedrehten Rechtecks.

Lösung: a) I. Wir bilden die Differenzvektoren: $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

und haben: $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-4) + 4 \cdot 3 + 0 \cdot 5 = 0$, so dass an der Ecke A ein <u>rechter Winkel</u> vorliegt.

b) Auf Grund der Parallelogrammbeziehung $\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ liegt mit C(1|6|6) das <u>Rechteck</u> ABCD vor.

b) Aus den drei Punkten A, B, C berechnen wir die Koordinatengleichung der das Rechteck ABCD umfassenden <u>Ebene</u> E mit dem Ansatz: E $ax_1+bx_2+cx_3 = 1$ (sofern – was hier der Fall ist – die Ebene nicht durch den Ursprung des x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems läuft). Es ergeben sich damit das lineare Gleichungssystem und der das Gleichungssystem lösende Gauß-Algorithmus:

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

A	+	2*a*	-	1*b*	+	1*c*	=	1
B	+	5*a*	+	3*b*	+	1*c*	=	1
C	+	1*a*	+	6*b*	+	6*c*	=	1

<u>Anfangstableau</u>:

2	-1	1	|	1
5	3	1	|	1
1	6	6	|	1

<u>1. Schritt</u>: 2*(*2*) - 5*(*1*) / 2*(*3*) - 1*(*1*) /

2	-1	1	|	1
0	11	-3	|	-3
0	13	11	|	1

<u>2. Schritt</u>: 11*(*3*) - 13*(*2*) /

2	-1	1	|	1
0	11	-3	|	-3
0	0	160	|	50

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

+	2*a*	-	1*b*	+	1*c*	=	1
		+	11*b*	-	3*c*	=	-3
				+	160*c*	=	50

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

c = 0.3125 = 5/16
b = -0.1875 = -3/16
a = 0.25 = 1/4

Wir erhalten: E: $\frac{1}{4}x_1 - \frac{3}{16}x_2 + \frac{5}{16}x_3 = 1$ und somit (nach Multiplikation mit 16) die Ebenengleichung:

E: $4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 16$

mit dem Normalenvektor: $\vec{n_E} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

c) Die Ebene F steht senkrecht auf der Ebene E und hat mit dieser die (Schnitt-) Gerade durch die Punkte A und D, also: g: $\vec{x} = \vec{OA} + r\,\vec{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ gemeinsam. Als Ebenengleichung für die senkrechte Ebene F ergibt sich in Parameterform:

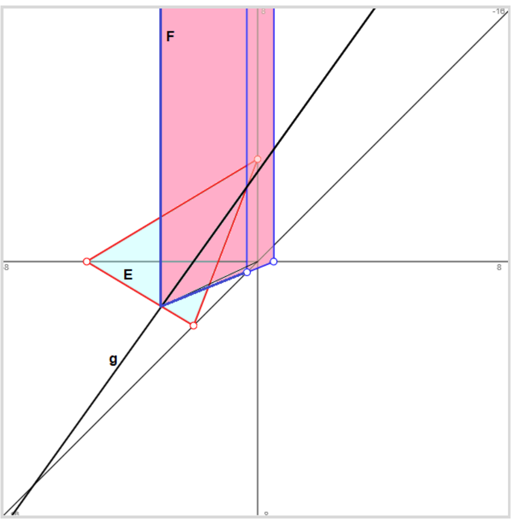
F: $\vec{x} = \vec{OA} + r\,\vec{AD} + s \cdot \vec{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Die Umwandlung der Parameterform in die Koordinatenform geschieht mit Hilfe des Kreuzprodukts (Vektorprodukts) der Spannvektoren der Ebene F:

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n_F} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Koordinatengleichung von F ist dann („Normalenvektor mal $\vec{x}$ gleich Normalenvektor mal Stützvektor“):

F: $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ⇔ F: $3x_1 + 4x_2 + 0x_3 = 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = 2$ ⇔ F: $3x_1 + 4x_2 = 2$.



d) Das Rechteck A'B'C'D' liegt auf der Ebene F und hat mit dem Rechteck ABCD die Ecken A und D gemeinsam. Es gilt also:

A'(2|-1|1) = A(2|-1|1), D'(-2|2|6) = D(-2|2|6).

Zur Bestimmung der Ecke B' ist zu beachten, dass der Punkt B' auf dem von A ausgehenden Normalenvektor $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ im Abstand $|\vec{AB}| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2 + 5^2 + 0^2} = 5$ zu A liegen kommt. Es gilt damit (unter Verwendung des Einheitsvektors):

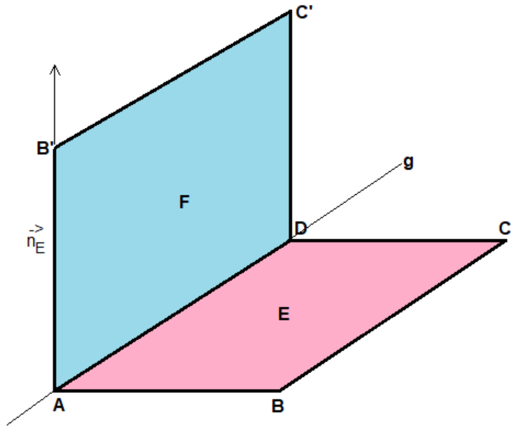
$$\vec{OB}' = \vec{OA} + 5 \cdot \frac{1}{|\vec{n}_E|} \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 5^2}} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{50}} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2\sqrt{2} \\ -1 - 1{,}5\sqrt{2} \\ 1 + 2{,}5\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

so dass sich die Ecke B'(2+2√2|-1-1,5√2|1+2,5√2) ergibt. Die Ecke C' berechnet sich mit

$$\vec{AB}' = \begin{pmatrix} 2 + 2\sqrt{2} \\ -1 - 1{,}5\sqrt{2} \\ 1 + 2{,}5\sqrt{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -1{,}5\sqrt{2} \\ 2{,}5\sqrt{2} \end{pmatrix}$$ wieder nach der Parallelogrammbeziehung:

$$\vec{OC}' = \vec{OD} + \vec{AB}' = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -1{,}5\sqrt{2} \\ 2{,}5\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 2\sqrt{2} \\ 2 - 1{,}5\sqrt{2} \\ 6 + 2{,}5\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

also als C'(-2+2√2|2-1,5√2|6+2,5√2). Damit sind alle Ecken des Rechtecks A'B'C'D' bestimmt.



www.michael-buhlmann.de / 06.2019 / Aufgabe 872