Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Ebenen

Aufgabe: Stelle die Ebenen E: $4x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$ und F: $2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 10$ in einem gemeinsamen x_1-x_2-x_3-Koordinatensystem dar. Zeichne ein und bestimme die Schnittgerade g der beiden Ebenen.

Lösung: I. Das Zeichnen von Ebenen in einem x_1-x_2-x_3-Koordinatensystem geschieht über die Spurpunkte, also die Schnittpunkte einer Ebene mit den Achsen des Koordinatensystems. Ist E eine Ebene in Koordinatengleichung E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$, so ergeben sich die Spurpunkte, Koeffizienten ungleich 0 vorausgesetzt, als: $S_1(d/a|0|0)$ (x_1-Achse), $S_2(0|d/b|0)$ (x_2-Achse), $S_3(0|0|d/c)$ (x_3-Achse). Die Spurpunkte werden, soweit vorhanden, miteinander durch in den Grundebenen des Koordinatensystems verlaufende Spurgeraden verbunden; sollte es für eine oder zwei Achsen des Koordinatensystems keine Spurpunkte geben, laufen die entsprechenden Spurgeraden parallel zu diesen Achsen.
Sind zwei Ebenen E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ und F: $ex_1 + fx_2 + gx_3 = h$ vorhanden, so schneiden sich zwei in derselben Grundebene befindliche Spurgeraden der Ebenen E und F zwischen den jeweiligen Spurpunkten; der Schnittpunkt gehört zur Schnittgeraden g der Ebenen. Zwei solcher Schnittpunkte lassen sich dann zur Schnittgeraden verbinden.

II. Rechnerisch lässt sich, die zwei Ebenen E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ und F: $ex_1 + fx_2 + gx_3 = h$ in Koordinatenform vorausgesetzt, die Schnittgerade, falls existent, bestimmen vermöge der Lagebeziehungen zwischen zwei Ebenen, d.h. vermöge eines linearen Gleichungssystems (zwei Gleichungen; drei Unbekannte x_1, x_2, x_3) mit dem Anfangstableau:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{array}\right) \end{array},$$

das mit Hilfe des Gauß-Algorithmus und unter Ergänzung einer dritten Zeile als Nullzeile (0 = 0) in Dreiecksgestalt umgeformt wird. Die auftretenden Arten der Endtableaus haben dann eine der folgenden Gestalten:

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} * & (*) & (*) & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

=> 2., 3. Zeile als Nullzeilen => Ebenen sind identisch: E = F

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} * & (*) & (*) & (*) \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

=> 2. Zeile mit Widerspruch, 3. Zeile als Nullzeile => Ebenen sind parallel: E || F

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} * & (*) & (*) & (*) \\ 0 & * & (*) & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

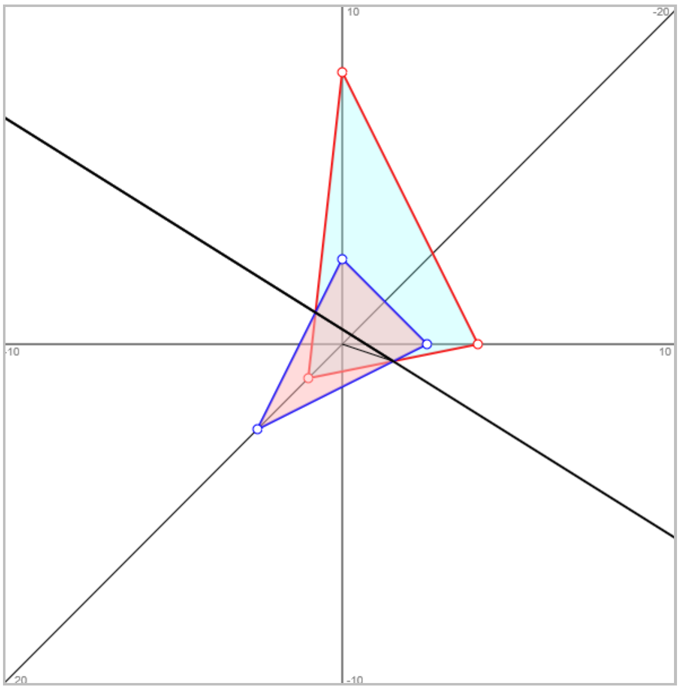
=> 3. Zeile als Nullzeile => Ebenen schneiden sich mit Schnittgerade $g = E \cap F$

(*: reelle Zahl ≠ 0, (*): reelle Zahl ≠ 0 oder = 0).

III. Als Spurpunkte der beiden Ebenen E: $4x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$ und F: $2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 10$ lassen sich ermitteln:

Ebene E: $S_1(2|0|0)$, $S_2(0|4|0)$, $S_3(0|0|8)$
Ebene F: $S_1(5|0|0)$, $S_2(0|2,5|0)$, $S_3(0|0|2,5)$.

Es ergibt sich (nach I.) auf Grundlage der jeweiligen Spurpunkt die nachstehende Zeichnung der Ebenen E und F:



Die Schnittgerade g ermittelt sich zeichnerisch als Gerade durch die Spurgeradenschnittpunkte auf der x_1-x_2- und x_1-x_3-Grundebene.

IV. Mit den Ebenengleichungen E: $4x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$ und F: $2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 10$ ergibt sich ein lineares Gleichungssystem, das wie folgt umgeformt wird:

Anfangstableau:

x_1	x_2	x_3	R.S.
4	2	1	8
2	4	4	10

1. Schritt: 2*(*2*) - 1*(*1*) /

4	2	1	8
0	6	7	12

(3.) Zeile hinzufügen / Endtableau:

4	2	1	8
0	6	7	12
0	0	0	0

Es existiert also (nach II.) eine Schnittgerade g mit: $x_3 = t$, $x_2 = 2–7t/6$, $x_1 = 1+t/3$. Die Gleichung der Schnittgeraden lautet damit:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{3}t \\ 2-\frac{7}{6}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{6} \\ 1 \end{pmatrix}.$$