Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Ebenen

Aufgabe: Gegeben sind die Ebenen E und F:

$$E: 2x_1 - x_2 + 9x_3 = -1$$

$$F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Stelle die Ebenen E und F in Hessescher Normalenform dar. Bestimme den Abstand der beiden Ebenen zum Ursprung des x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems.
b) Berechne Schnittgerade und Schnittwinkel der Ebenen E und F.

Lösung: a) I. Ebenen im x_1-x_2-x_3-Koordinatensystem des dreidimensionalen reellen Vektorraums lassen sich in Parameter-, Normalen-, Hessescher Normalen- und Koordinatenform darstellen vermöge der nachstehenden Übersicht:

Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + r\vec{v} + s\vec{w}$

mit: Stützvektor $\vec{b}$, Richtungs-/Spannvektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$, Parametern r, s

(Parameterform)

Normalenvektor $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$, Stützvektor $\vec{p} = \vec{b}$

Ebene: E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{p}) = 0$

(Normalenform)

Normalenvektor $\vec{n}$, normiert als $\vec{n}^{\,0} = \vec{n} \big/ |\vec{n}|$

Ebene: E: $\vec{n}^{\,0}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$

(Hesse’sche Normalenform)

Normalenvektor $\vec{n} = (a \quad b \quad c)^T$ mit: $\vec{n}\,\vec{x} = ax_1 + bx_2 + cx_3$

Punkt PεE mit: $\vec{p} = \vec{OP}$, $d = \vec{n}\,\vec{p}$

Ebene: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

(Koordinatenform)

Normalenvektor $\vec{n} = (a \quad b \quad c)^T$

Ebene: E: $\dfrac{ax_1 + bx_2 + cx_3 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$

(Hesse’sche Normalenform)

LGS:

$$\begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \\ x_2 = r \\ x_3 = s \end{pmatrix}$$

Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + r\vec{v} + s\vec{w}$

(Parameterform)

II. Wir wandeln die Ebene F: $\overset{->}{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in Parameterform in eine Ebene in Koordinatenform um und haben mit dem Normalenvektor

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \overset{->}{n_F} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

die Koordinatengleichung: F: $2x_1 – x_2 + 8x_3 = -1$.

III. Die Hessesche Normalenformen für beide Ebenen E und F lauten mit den Normalenvektoren und deren Längen

$$\overset{->}{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\overset{->}{n_E}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 9^2} = \sqrt{86}$$

$$\overset{->}{n_F} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\overset{->}{n_F}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 8^2} = \sqrt{69}$$

auf:

E: $2x_1 – x_2 + 9x_3 = -1$ => E: $\frac{2x_1 - x_2 + 9x_3 + 1}{\sqrt{86}} = 0$

F: $2x_1 – x_2 + 8x_3 = -1$ => F: $\frac{2x_1 - x_2 + 8x_3 + 1}{\sqrt{69}} = 0$.

IV. Die Abstände der Ebenen E und F zum Ursprung des x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems betragen (Einsetzen des Koordinatenursprungs O(0|0|0)):

d(O,E) = $\frac{|2 \cdot 0 - 0 + 9 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{86}} = \frac{1}{\sqrt{86}}$

d(O,F) = $\frac{|2 \cdot 0 - 0 + 8 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{69}} = \frac{1}{\sqrt{69}}$.

b) I. Rechnerisch lässt sich, die zwei Ebenen E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ und F: $ex_1 + fx_2 + gx_3 = h$ in Koordinatenform vorausgesetzt, die Schnittgerade, falls existent, bestimmen vermöge der Lagebeziehungen zwischen zwei Ebenen, d.h. vermöge eines linearen Gleichungssystems (zwei Gleichungen; drei Unbekannte x_1, x_2, x_3) mit dem Anfangstableau:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{array}\right) \end{array},$$

das mit Hilfe des Gauß-Algorithmus und unter Ergänzung einer dritten Zeile als Nullzeile (0 = 0) in Dreiecksgestalt umgeformt wird. Die auftretenden Arten der Endtableaus haben dann eine der folgenden Gestalten:

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} * & (*) & (*) & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

=> 2., 3. Zeile als Nullzeilen => Ebenen sind identisch: E = F

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} * & (*) & (*) & (*) \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

=> 2. Zeile mit Widerspruch, 3. Zeile als Nullzeile => Ebenen sind parallel: E || F

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} * & (*) & (*) & (*) \\ 0 & * & (*) & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

=> 3. Zeile als Nullzeile => Ebenen schneiden sich mit Schnittgerade g = E∩F

(*: reelle Zahl ≠ 0, (*): reelle Zahl ≠ 0 oder = 0).

II. Der <u>Schnittwinkel</u> φ zwischen zwei sich schneidenden Ebenen E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ und F: $ex_1 + fx_2 + gx_3 = h$ ist der Winkel zwischen deren Normalenvektoren und errechnet sich damit als:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\left|\vec{n}_E \cdot \vec{n}_F\right|}{\left|\vec{n}_E\right| \cdot \left|\vec{n}_F\right|}\right).$$

III. Mit den Ebenengleichungen E: $2x_1 - x_2 + 9x_3 = -1$ und F: $2x_1 - x_2 + 8x_3 = -1$ in Koordinatenform ergibt sich ein lineares Gleichungssystem, das wie folgt umgeformt wird:

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$+\ 2x_1\ -\ 1x_2\ +\ 9x_3\ =\ -1$
$+\ 2x_1\ -\ 1x_2\ +\ 8x_3\ =\ -1$

<u>Anfangstableau</u>:

x_1	x_2	x_3	|	*R.S.*
2	-1	9	|	-1
2	-1	8	|	-1

<u>1. Schritt</u>: 1*(*2*) - 1*(*1*) /

2	-1	9	|	-1
0	0	-1	|	0

<u>Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$+\ 2x_1\ -\ 1x_2\ +\ 9x_3\ =\ -1$
$-\ 1x_3\ =\ 0$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

$x_3 = 0$
$x_2 = t$
$x_1 = -0.5 + 0.5t$

-> unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems; Parameter ist die reelle Zahl t

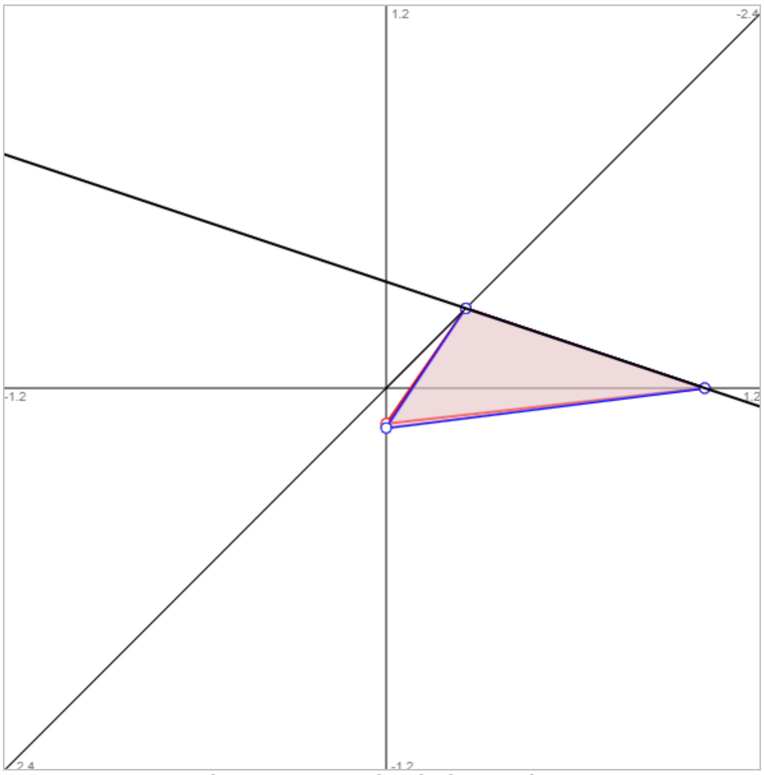
Es existiert also (nach I.) eine Schnittgerade g mit: $x_3 = 0$, $x_2 = t$, $x_1 = -0{,}5 + 0{,}5t$. Die Gleichung der <u>Schnittgeraden</u> lautet damit:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -0{,}5 + 0{,}5t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

IV. Der <u>Schnittwinkel</u> zwischen den Ebenen E und F errechnet sich mit den Normalenvektoren

$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ als:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \right|} \right) = \arccos\left(\frac{|4+1+72|}{\sqrt{86} \cdot \sqrt{69}} \right) = \arccos\left(\frac{77}{\sqrt{86} \cdot \sqrt{69}} \right) = \arccos(0.9996) = 1{,}6° .$$



Ebenen E, F und Schnittgerade g

www.michael-buhlmann.de / 01.2021 / Aufgabe 1282