Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Ebenen

Aufgabe: Zeige, dass alle Punkte P(2+2r-s|1+2r+s|-3+r+s), r, s als reelle Zahlen, denselben Abstand von der Ebene E: $x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 13$ besitzen. Was stellt damit die Menge aller Punkte P geometrisch im kartesischen x_1-x_2-x_3-Koordinatensystem dar?

Lösung: I. Überlegungen zur (relativen) Lage eines Punktes P zu einer Ebene E münden ein in eine Abstandsformel, wonach sich der Abstand d(P,E) zwischen Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ und Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ letztlich auf der Differenz $ap_1 + bp_2 + cp_3 - d$ gründet, deren Betrag $|ap_1 + bp_2 + cp_3 - d|$ und dessen Normierung durch den Betrag des Normalenvektors der Ebene $\left|\vec{n}\right| = \left|\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Es gilt damit die (den absoluten Abstand in Längeneinheiten [LE] messende) Abstandsformel, die sog. <u>Hessesche Normalform</u>:

$$\text{d(P,E)} = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

II. Die Anwendung der Hesseschen Normalform durch Einsetzen des für alle reelle Zahlen r, s definierten Punktes P(2+2r-s|1+2r+s|-3+r+s) und der Ebene E: $x_1 - 3x_2 = 9$ in die obige Formel ergibt:

$$\text{d(P,E)} = \frac{|(2+2r-s)-3\cdot(1+2r+s)+4\cdot(-3+r+s)-13|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+4^2}} = \frac{|2+2r-s-3-6r-3s-12+4r+4s-13|}{\sqrt{26}} =$$

$$\frac{|-26|}{\sqrt{10}} = \frac{26}{\sqrt{26}} = \sqrt{26}\ \text{LE}$$

für den gesuchten <u>Abstand</u> zwischen jedem beliebigen Punkt P und der Ebene E. In der Hesseschen Normalform sind bei der Berechnung des Abstands die also reellen Zahlen r, s weggefallen, so dass sich für jeden Punkt P derselbe Abstand zur Ebene E ergibt.

III. Wegen desselben Abstands d(P,E) = $\sqrt{26}$ LE für jeden Punkt P(2+2r-s|1+2r+s|-3+r+s), r, s als reelle Zahlen, bilden die Punkte P offensichtlich eine zur Ebene E <u>parallele Ebene</u> F, die vermöge der Entsprechung zwischen Punkt P und Ortsvektor $\vec{x} = \vec{OP}$ dargestellt werden kann als:

$$\text{F: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 2+2r-s \\ 1+2r+s \\ -3+r+s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2r \\ 2r \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -s \\ s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also durch eine <u>Ebenengleichung in Parameterform</u> mit den reellen Parametern r, s.

IV. Die zu E parallele Ebene F lässt sich auch durch eine <u>Ebenengleichung in Koordinatenform</u> charakterisieren. Als Normalenvektor von F lässt sich daher der Normalenvektor von E auswählen, so dass der Ansatz

F: $x_1 - 3x_2 + 4x_3 = d$ (*)

trägt. Einsetzen des Punktes P(2|1|-3) bei r = s = 0 in (*) bestimmt den Wert von d als:

$d = 2 - 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-3) = -13$,

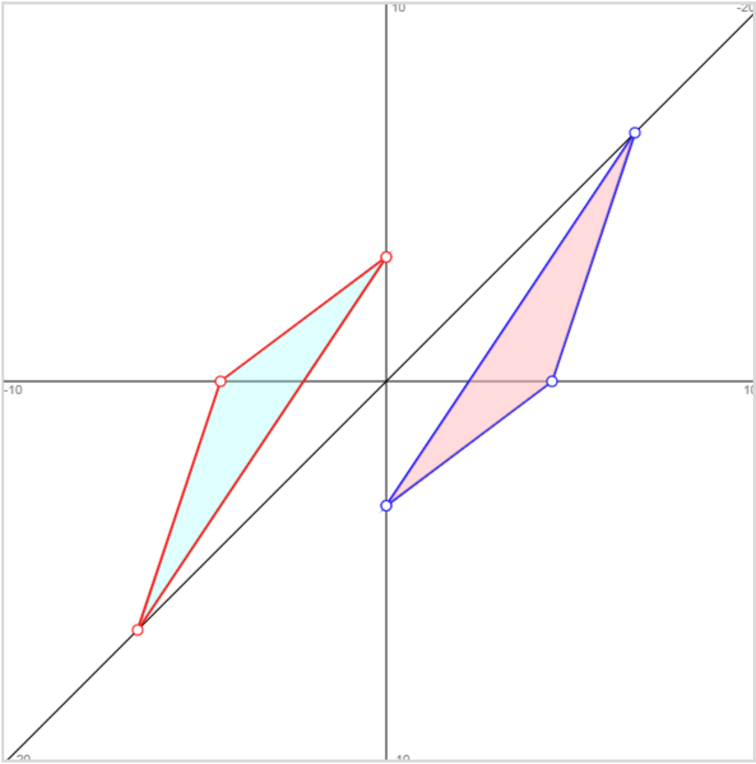
so dass sich die Koordinatenform

F: $x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -13$

ergibt.

Die Ebenen E und F liegen im Übrigen über den Ursprung O(0|0|0) des Koordinatensystems punktsymmetrisch zueinander.

V. Grafisch ergibt sich hinsichtlich der zueinander parallelen Ebenen E: $x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 13$ und F: $x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -13$:



(LE = Längeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 09.2023 / Aufgabe 1888