**Michael Buhlmann**

# Mathematikaufgaben
## > Vektorrechnung
## > Ebenen

---

**Aufgabe**: Gegeben sind die Ebenen

$$\text{E: } 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 13,\ \text{F: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

a) Zeige, dass die beiden Ebenen zueinander parallel liegen.

b) Berechne den Abstand zwischen den beiden Ebenen.

c) Konstruiere die (parallelen) Ebenen K, die von der Ebene F einen doppelt so großen Abstand haben wie von der Ebene E.

**Lösung**: a) I. Liegt eine Ebene (E) in Koordinatenform, die andere (F) in Parameterform vor, so sind zum Nachweis der Parallelität die Skalarprodukte zwischen dem Normalenvektor der Ebene in Koordinatenform und den beiden Spannvektoren der Ebene in Parameterform auszurechnen. Ergibt sich jeweils als Rechenergebnis Null, so liegt Parallelität der Ebenen vor, andernfalls nicht.

II. Wir berechnen mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ der Ebene E die Skalarprodukte:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-4) + 1 \cdot 8 + (-2) \cdot 0 = -8 + 8 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 5 = 6 + 4 - 10 = 0$$

und haben bei verschwindenden Skalarprodukten in der Tat die <u>Parallelität</u> der Ebenen E und F. Eine eventuelle Identität der beiden Ebenen können wir ausschließen, wenn wir die Ebene F in die Koordinatenform überführen. Dazu reicht es, im (wegen der Parallelität gültigen) Ansatz

F: $2x_1 + x_2 - 2x_3 = d$

die reelle Zahl d durch Einsetzen des Punktes P(8|4|-10) als Stützvektor der Ebene F in Parameterform zu berechnen:

$d = 2 \cdot 8 + 4 - 2 \cdot (-10) = 16 + 4 + 20 = 40.$

Die Ebene F lautet damit in Koordinatenform:

F: $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 40$.

Die Ebenen E und F sind damit (auf Grund desselben Normalenvektors) parallel und (auf Grund unterschiedlicher Werte auf der rechten Seite der jeweiligen Koordinatengleichungen) verschieden.

b) I. Der Abstand d(P,E) zwischen einem Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ und einer Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ errechnet sich nach der Abstandsformel der sog. <u>Hesseschen Normalform</u>:

$$d(P,E) = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

II. Zur Anwendung der Hesseschen Normalform betrachten wir den Punkt P(8|4|-10) als Stützvektor der Ebene F in Parameterform und die Ebene E: $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 13$. Eingesetzt in die Hessesche Normalform ergibt sich:

$$d(P,E) = \frac{|2\cdot 8+4-2\cdot(-10)-13|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{|40-13|}{\sqrt{9}} = \frac{27}{3} = 9 \text{ LE}$$

für den gesuchten Abstand zwischen dem Punkt P und der Ebene E, d.h. wegen der Parallelität zwischen den beiden Ebenen E und F. Der Abstand zwischen den parallelen Ebenen E und F ist damit

d(E, F) = 9 LE

groß.

III. Eine andere Möglichkeit, den Abstand der Ebenen E und F zu berechnen, beruht auf den Koordinatengleichungen der beiden Ebenen, hier vorausgesetzt als E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d_E$ und F: $ax_1+bx_2+cx_3 = d_F$. Der Abstand zwischen den Ebenen E und F errechnet sich auf Grund desselben Normalenvektors leicht mit der (Variante der) Hesseschen Normalenform:

$$d(E,F) = \frac{|d_F - d_E|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad (*).$$

IV. Es gilt gemäß III. für den gesuchten Abstand zwischen den Ebenen:

$$d(E,F) = \frac{|40-13|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{|27|}{\sqrt{9}} = \frac{27}{3} = 9 \text{ LE.}$$

c) I. Mit d(E,F) = 9 sollen zu den Ebenen E und F parallele Ebenen K gefunden werden, so dass hinsichtlich der Abstände

$2\cdot d(E,K) = d(F,K)$

gilt. Wir setzen für die gesuchten Ebenen

K: $2x_1 + x_2 - 2x_3 = d$

fest und haben gemäß (*):

$2\cdot d(E,K) = d(F,K)$

$$2\cdot\frac{|d-13|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{|d-40|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} \qquad |\cdot\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}$$

$2\cdot|d-13| = |d-40|$.

Die Betragsgleichung kann über eine Fallunterscheidung gelöst werden:

1. Fall: $d-13\geq 0$, $d-40\geq 0 \Leftrightarrow d\geq 13$, $d\geq 40 \Rightarrow d\geq 40$: $2(d-13) = d-40 \Leftrightarrow 2d-26 = d-40 \Leftrightarrow d-26 = -40 \Leftrightarrow d = -14$ -> Widerspruch, da $d\geq 40$;

2. Fall: $d-13\geq 0$, $d-40<0 \Leftrightarrow d\geq 13$, $d<40 \Rightarrow 13\leq d<40$: $2(d-13) = -(d-40) \Leftrightarrow 2d-26 = -d+40 \Leftrightarrow 3d-26 = 40 \Leftrightarrow 3d = 66 \Leftrightarrow \underline{d = 22}$;

3. Fall: $d-13<0$, $d-40\geq 0 \Leftrightarrow d<13$, $d\geq 40$ -> Widerspruch (der Fall tritt nicht auf);

4. Fall: $d-13<0$, $d-40<0 \Leftrightarrow d<13$, $d<40 \Rightarrow d<13$: $-2(d-13) = -(d-40) \Leftrightarrow 2d-26 = d-40 \Leftrightarrow d-26 = -40 \Leftrightarrow \underline{d = -14}$.

Es ergeben sich damit zwei Ebenen K als:

K: $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 22$
K: $2x_1 + x_2 - 2x_3 = -14$

mit: $d(E,K) = \frac{|22-13|}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3$, $d(F,K) = \frac{|22-40|}{\sqrt{9}} = \frac{18}{3} = 6$ (d = 22), $d(E,K) = \frac{|-14-13|}{\sqrt{9}} = \frac{27}{3} = 9$, $d(F,K) = \frac{|-14-40|}{\sqrt{9}} = \frac{54}{3} = 18$ (d = -14). Die Ebene K: $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 22$ liegt zwischen den Ebenen E und F, die Ebene K: $2x_1 + x_2 - 2x_3 = -14$ „unterhalb“ der Ebene E.

(LE = Längeneinheiten)