Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Ebenen

Aufgabe: Wandle die Ebene E in Parameterform mit:

$$\text{E: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

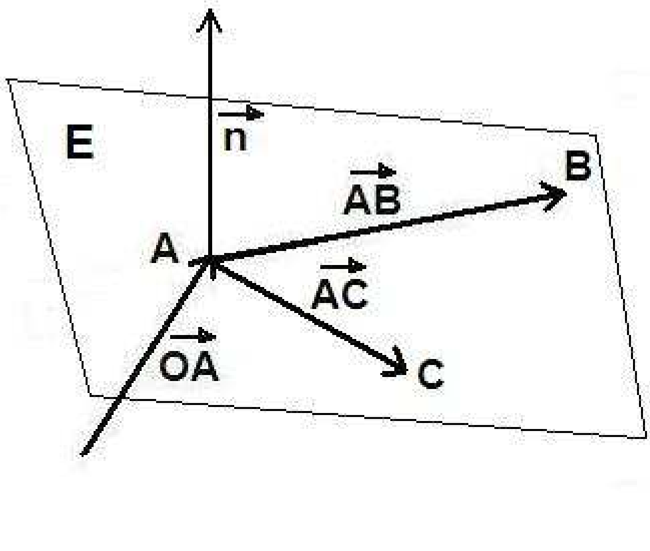
in die Ebene in Koordinatenform um.

1. Lösung: I. <u>Bestimmung des Normalenvektors</u>. Da der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ senkrecht auf den Richtungsvektoren $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$ der Ebene E steht, muss vermöge Skalarprodukt und Orthogonalität das nachstehende lineare Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten gelten:

$$\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = -9n_1 + 6n_2 = 0 \Leftrightarrow 6n_2 = 9n_1 \Leftrightarrow n_2 = \frac{3}{2}n_1$$

$$\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = -9n_1 - 3n_3 = 0 \Leftrightarrow -3n_3 = 9n_1 \Leftrightarrow n_3 = -3n_1$$

Wir wählen $n_1 = 2$ (Brüche vermeiden!) und haben mit $n_1 = 2$, $n_2 = 3$ und $n_3 = -6$ somit als Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$.



II. Multiplikation der Ebenengleichung mit dem Normalenvektor ergibt (Normalenform der Ebenengleichung!) wegen $\vec{n}\,\vec{r_1} = \vec{n}\,\vec{r_2} = 0$:

E: $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ E: $2x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 18 + 0 - 0 = 18$,

also die Ebenengleichung in Koordinatenform:

$$\text{E: } 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 18.$$

2. Lösung: I. Bestimmung des Normalenvektors mit Hilfe des Kreuzprodukts aus den beiden Richtungsvektoren der Ebene ergibt:

$$\vec{r_1} \times \vec{r_2} = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\cdot(-3) - 0\cdot 0 \\ 0\cdot(-9) - (-9)\cdot(-3) \\ -9\cdot 0 - 6\cdot(-9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -27 \\ 54 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

$$\begin{matrix} -9 & -9 \\ 6 & 0 \end{matrix}$$

(<- Wiederholung der ersten Zeilen der beiden Vektoren zur besseren Rechnung)

Da es bei der Koordinatenform einer Ebene nur auf die Richtung des (mithin eines beliebigen) Normalenvektors ankommt, „kürzen" wir den Normalenvektor (Teilen durch -9) zu:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

II. Multiplikation der Ebenengleichung mit dem Normalenvektor ergibt:

E: $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ E: $2x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 18$,

also die Ebenengleichung in Koordinatenform.

3. Lösung: Unter der Voraussetzung, dass die Ebene E nicht durch den Ursprung O(0|0|0) des Koordinatensystems geht, lassen sich zunächst drei Punkte A, B, C der Ebene bestimmen, etwa:

A(9|0|0) (Stützvektor, s=0, t=0)
B(-9|6|-3) (s=1, t=1)
C(-18|6|-6) (s=1, t=2).

Die Ebene in Koordinatenform lässt sich dann schreiben als: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 1$ (*), die Koeffizienten a, b, c sind lassen sich über ein lineares Gleichungssystem durch Einsetzen der Punkte A, B, C in die Ebenengleichung (*) bestimmen:

Lineares Gleichungssystem:

+	9*a*					=	1
-	9*a*	+	6*b*	-	3*c*	=	1
-	18*a*	+	6*b*	-	6*c*	=	1

Anfangstableau:

9	0	0	|	1
-9	6	-3	|	1
-18	6	-6	|	1

1. Schritt: 1*(*2*) + 1*(*1*) / 1*(*3*) + 2*(*1*) /

9	0	0	|	1
0	6	-3	|	2
0	6	-6	|	3

2. Schritt: 1*(*3*) - 1*(*2*) /

$$\begin{array}{ccc|c} 9 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcrcl} +9a & & & & & = & 1 \\ & + & 6b & - & 3c & = & 2 \\ & & & - & 3c & = & 1 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:
$c = -1/3$
$b = 1/6$
$a = 1/9$

Die Ebene in Koordinatenform lautet damit: E: $\frac{1}{9}x_1 + \frac{1}{6}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 1$. Multiplikation mit dem Hauptnenner 18 ergibt die ganzzahlige Ebenengleichung: E: $2x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 18$.

4. Lösung: Unter der Voraussetzung, dass die Ebene E nicht durch den Ursprung O(0|0|0) des Koordinatensystems geht, lassen sich mitunter sofort die drei Spurpunkte S_1, S_2, S_3 der Ebene bestimmen, hier als:

$S_1(9|0|0)$ (Stützvektor, s=0, t=0)
$S_2(0|6|0)$ (s=1, t=0)
$S_3(0|0|-3)$ (s=0, t=1).

Wir erhalten, ausgehend von E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 1$, unmittelbar die Ebenengleichung in Koordinatenform, wenn wir die Koeffizienten a, b, c als Kehrwerte der entsprechenden x_1-, x_2-, x_3-Koordinaten der Spurpunkte errechnen, also: a = 1/9, b = 1/6, c = -1/3 und damit:

E: $\frac{1}{9}x_1 + \frac{1}{6}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 1$. Multiplikation mit dem Hauptnenner 18 ergibt die ganzzahlige Ebenengleichung: E: $2x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 18$.

08.2014 / Aufgabe 33