

Mathematikaufgaben

> Vektorrechnung

> Ebenen

Aufgabe: Bestimme für die Ebene E in Koordinatenform mit:

$$E: 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12$$

die Spurpunkte und zeichne die Ebene ein als Ebenenausschnitt im dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem.

Lösung: I. Allgemein gilt hinsichtlich der Ermittlung der Spurpunkte die folgende Vorgehensweise. Ist eine Ebene E als Koordinatengleichung $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ mit reellen a, b, c, d gegeben, so ergeben sich als Spurpunkte auf den Koordinatenachsen:

x_1 -Achse: Spurpunkt $S_1(d/a|0|0)$ bei $a \neq 0$, kein Spurpunkt S_1 bei $a=0$

x_2 -Achse: Spurpunkt $S_2(0|d/b|0)$ bei $b \neq 0$, kein Spurpunkt S_2 bei $b=0$

x_3 -Achse: Spurpunkt $S_3(0|0|d/c)$ bei $c \neq 0$, kein Spurpunkt S_3 bei $c=0$.

Besitzt die Ebene keinen Spurpunkt auf einer Koordinatenachse, so ist sie zu dieser Achse (bzw. zu diesen Achsen, d.h. einer Grundebene des Koordinatensystems) parallel.

II. Berechnung der Spurpunkte: Spurpunkte S_1, S_2, S_3 als Schnittpunkte einer Ebene mit den x_1, x_2, x_3 -Koordinatenachsen zeichnen sich also dadurch aus, dass je zwei Koordinaten eines Spurpunktes den Wert 0 besitzen. Die dritte Koordinate ermitteln wir aus der Ebenengleichung $E: 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12$ durch jeweilige Division der Zahl der rechten Seite der Koordinatenform mit dem Koeffizienten der x_1, x_2, x_3 -Koordinate, also:

x_1 -Achse: $x_1 = 12:2 = 6 \Rightarrow$ Spurpunkt $S_1(6|0|0)$

x_2 -Achse: $x_2 = 12:3 = 4 \Rightarrow$ Spurpunkt $S_2(0|4|0)$

x_3 -Achse: $x_3 = 12:1 = 12 \Rightarrow$ Spurpunkt $S_3(0|0|12)$.

Wir erhalten die gesuchten Spurpunkte $S_1(6|0|0), S_2(0|4|0), S_3(0|0|12)$ auf der x_1, x_2 - bzw. x_3 -Koordinatenachse. Der Ebenenausschnitt stellt sich als Dreieck der Spurpunkte dar:

