

# Mathematikaufgaben

## > Vektorrechnung

### > Ebenen

**Aufgabe:** Bestimme für die Ebene E in Koordinatenform mit:

$$E: -4x_1 + 5x_2 - 10x_3 = 20$$

die Spurpunkte und zeichne die Ebene ein als Ebenenausschnitt im dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem.

**Lösung:** I. Allgemein gilt hinsichtlich der Ermittlung der Spurpunkte die folgende Vorgehensweise. Ist eine Ebene E als Koordinatengleichung  $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$  mit reellen  $a, b, c, d$  gegeben, so ergeben sich als Spurpunkte auf den Koordinatenachsen:

$x_1$ -Achse: Spurpunkt  $S_1(d/a|0|0)$  bei  $a \neq 0$ , kein Spurpunkt  $S_1$  bei  $a=0$

$x_2$ -Achse: Spurpunkt  $S_2(0|d/b|0)$  bei  $b \neq 0$ , kein Spurpunkt  $S_2$  bei  $b=0$

$x_3$ -Achse: Spurpunkt  $S_3(0|0|d/c)$  bei  $c \neq 0$ , kein Spurpunkt  $S_3$  bei  $c=0$ .

Besitzt die Ebene keinen Spurpunkt auf einer Koordinatenachse, so ist sie zu dieser Achse (bzw. zu diesen Achsen, d.h. einer Grundebene des Koordinatensystems) parallel.

II. Berechnung der Spurpunkte: Spurpunkte  $S_1, S_2, S_3$  als Schnittpunkte einer Ebene mit den  $x_1, x_2, x_3$ -Koordinatenachsen zeichnen sich also dadurch aus, dass je zwei Koordinaten eines Spurpunktes den Wert 0 besitzen. Die dritte Koordinate ermitteln wir aus der Ebenengleichung  $E: -4x_1 + 5x_2 - 10x_3 = 20$  durch jeweilige Division der Zahl der rechten Seite der Koordinatenform mit dem Koeffizienten der  $x_1, x_2, x_3$ -Koordinate, also:

$x_1$ -Achse:  $x_1 = 20 : (-4) = -5 \Rightarrow$  Spurpunkt  $S_1(-5|0|0)$

$x_2$ -Achse:  $x_2 = 20 : 5 = 4 \Rightarrow$  Spurpunkt  $S_2(0|4|0)$

$x_3$ -Achse:  $x_3 = 20 : (-10) = -2 \Rightarrow$  Spurpunkt  $S_3(0|0|-2)$ .

Wir erhalten die gesuchten Spurpunkte  $S_1(-5|0|0), S_2(0|4|0), S_3(0|0|-2)$  auf der  $x_1, x_2$ - bzw.  $x_3$ -Koordinatenachse. Der Ebenenausschnitt stellt sich als Dreieck der Spurpunkte dar:

