Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Ebenen

Aufgabe: Zeichne einen geeigneten Ausschnitt der Ebene E in Parameterform mit:

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

in das dreidimensionale kartesische Koordinatensystem ein.

Lösung: I. Liegt eine Ebene in Parameterdarstellung vor, gilt also: E: $\vec{x} = \vec{a} + s\vec{r_1} + t\vec{r_2}$ mit dem Stützvektor $\vec{a}$ und den Richtungsvektoren (Spannvektoren) $\vec{r_1}, \vec{r_2}$, so lässt sich die Ebenengleichung in Koordinatenform ermitteln vermöge des Normalenvektors $\vec{n} = \vec{r_1} \times \vec{r_2}$ (Kreuzprodukt) und der Skalarmultiplikation E: $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{a}$ ⇔ E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$.

II. Allgemein gilt hinsichtlich der Ermittlung der (für die Zeichnung des Ebenenausschnitts notwendigen) Spurpunkte die folgende Vorgehensweise. Ist eine Ebene E als Koordinatengleichung E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ mit reellen a, b, c, d gegeben, so ergeben sich als Spurpunkte auf den Koordinatenachsen:

x_1-Achse: Spurpunkt $S_1(d/a|0|0)$ bei $a \neq 0$, kein Spurpunkt S_1 bei $a=0$
x_2-Achse: Spurpunkt $S_2(0|d/b|0)$ bei $b \neq 0$, kein Spurpunkt S_2 bei $b=0$
x_3-Achse: Spurpunkt $S_3(0|0|d/c)$ bei $c \neq 0$, kein Spurpunkt S_3 bei $c=0$.

Besitzt die Ebene keinen Spurpunkt auf einer Koordinatenachse, so ist sie zu dieser Achse (bzw. zu diesen Achsen, d.h. einer Grundebene des Koordinatensystems) parallel.

III. Um einen Ausschnitt der Ebene E im Koordinatensystem zu zeichnen, benötigen wir die Koordinatendarstellung und daraus die Spurpunkte der Ebene. Wir berechnen daher zunächst Ebenengleichung in Koordinatenform. Als Kreuzprodukt der Spannvektoren ergibt sich der Normalenvektor der Ebene E:

$$\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Durch Skalarmultiplikation erhalten wir die gesuchte Koordinatengleichung:

$$E:\ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow E:\ 2x_1 + 0x_2 - 1x_3 = 2x_1 - x_3 = 8 + 0 + 0 = 8.$$

Die Koordinatenform der Ebene lautet also: E: $2x_1 - x_3 = 8$.

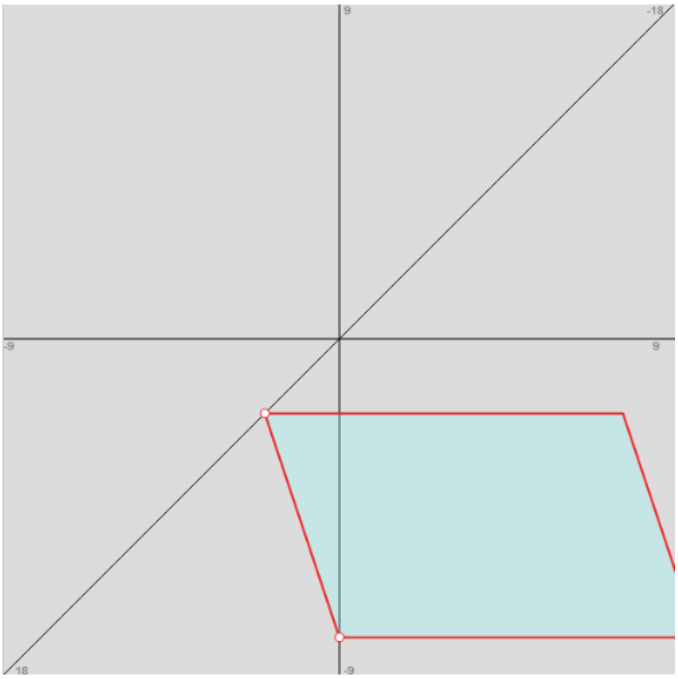
IV. Berechnung der Spurpunkte: Spurpunkte S_1, S_2, S_3 als Schnittpunkte einer Ebene mit den x_1-, x_2-, x_3-Koordinatenachsen zeichnen sich also dadurch aus, dass je zwei Koordinaten eines Spurpunktes den Wert 0 besitzen. Die dritte Koordinate ermitteln wir aus der Ebenengleichung E: $2x_1 - x_3 = 8$ durch jeweilige Division der Zahl der rechten Seite der Koordinatenform mit dem Koeffizienten der x_1-, x_2-, x_3-Koordinate, sofern möglich; also:

x_1-Achse: $x_1 = 8:2 = 4$ => Spurpunkt $S_1(4|0|0)$

x_2-Achse: kein Spurpunkt S_2 => Ebene parallel zur x_2-Achse
x_3-Achse: $x_3 = 8:(-1) = -8$ => Spurpunkt $S_3(0|0|-8)$

Wir erhalten die gesuchten Spurpunkte $S_1(4|0|0)$, $S_3(0|0|-8)$ auf der x_1- bzw. x_3-Koordinatenachse.

V. Der Ebenenausschnitt stellt sich dar als Parallelogramm durch die Spurpunkte, das parallel zur x_2-Koordinatenachse ist:



www.michael-buhlmann.de / 12.2015 / Aufgabe 173