Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben

> Vektorrechnung

> Ebenen

Aufgabe: Bestimme die Koordinatenform (Koordinatengleichung) der Ebene, auf der die Punkte P(2|0|0), Q(0|-4|0) und R(0|0|8) liegen.

Lösung: I. Allgemeine Vorgehensweise: Drei Punkte P, Q und R bestimmen eine Ebene E, die sich in Koordinatenform als:

$$E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \text{ bzw. } E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = 1 \text{ (KF).}$$

darstellen lässt, wenn sie nicht den Ursprung O(0|0|0) des x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems enthält. Durch Einsetzen der x_1-, x_2- und x_3-Koordinaten der drei Punkte P, Q, und R in die Gleichung E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 1$ ergibt sich dabei ein lineares Gleichungssystem, das etwa mit dem Gauß-Algorithmus zu lösen ist (Ermittlung der Unbekannten a, b, c).

Sind zudem die Punkte P, Q, R Spurpunkte der zu konstruierenden Ebene E, gilt also: P(p|0|0), Q(0|q|0), R(0|0|r) (mit reellen p, q, r ≠ 0), so lässt sich die Ebene sofort bestimmen als:

$$E: \frac{1}{p}x_1 + \frac{1}{q}x_2 + \frac{1}{r}x_3 = 1.$$

II. Die drei Punkte P(2|0|0), Q(0|-4|0) und R(0|0|8) sind als Achsenabschnittspunkte (jeweils zwei Koordinaten sind 0) Spurpunkte der zu konstruierenden Ebene E der Koordinatenform:

E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 1$.

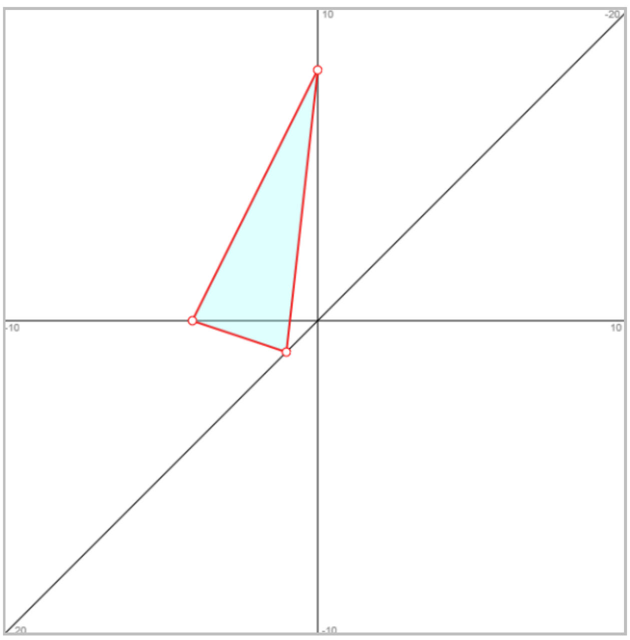
Also bestimmen sich: a = 1/2, b = -1/4, c = 1/8, so dass die Ebene E durch die Gleichung:

E: $\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{8}x_3 = 1$

beschrieben werden kann. Multiplikation mit dem Hauptnenner als kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen 2, 4 und 8, d.h. mit 8 ergibt:

E: $4x_1 – 2x_2 + x_3 = 8$,

so dass eine ganzzahlige Darstellung der Ebenengleichung folgt.



www.michael-buhlmann.de / 06.2018 / Aufgabe 583